1ª PRUEBA

1 de marzo de 2013

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas
Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema
Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en el cuadro siguiente!

APELLIDOS Y NOMBRE:...

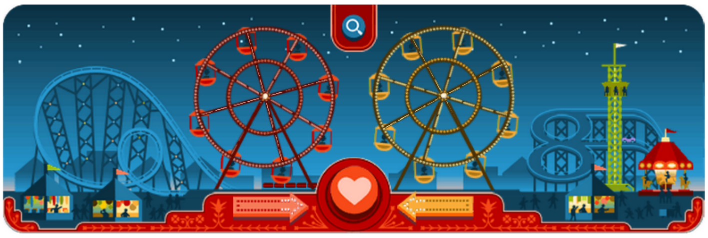
CENTRO:...

LOCALIDAD:...

Subvenciona:

P1.- Un modelo de frenado en las *torres de caída libre*.

La atracción estrella de muchos parques es la *torre de caída libre*. En el simpático *doodle* que Google dedicó el pasado 14 de febrero a San Valentín y a George Ferris, creador de la primera noria gigante en Chicago en 1893, está representada una de estas torres, en la parte derecha de la imagen.



La "atracción" consiste en elevar hasta una altura *H* una plataforma en la que están sentados, bien sujetos, los sufridos pasajeros. Desde esta altura *H*, se deja caer la plataforma en caída libre hasta un punto B, en el que comienza a actuar una fuerza de frenado *F*. Como es lógico, esta fuerza debe conseguir que la plataforma llegue al suelo con velocidad nula.

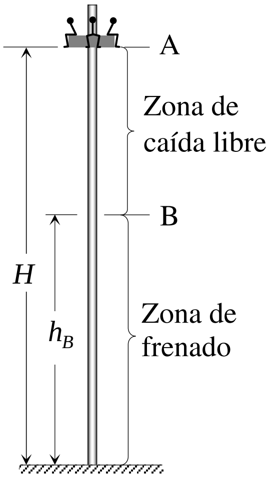


Fig. 1

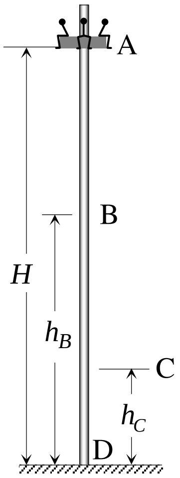


Fig. 2

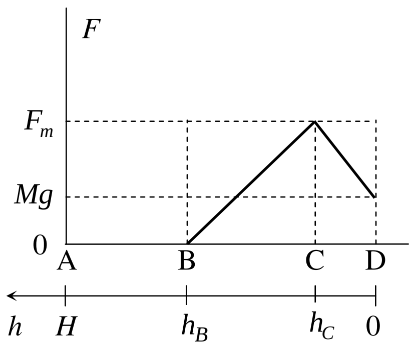


Fig. 3

1.- Considera que la fuerza de frenado que actúa entre el punto B y el suelo es constante. (Figura 1)

1a) Sabiendo que la altura del punto B es $h_B = 3H/5$, determina el valor que debe tener la fuerza, *F*, en función de la aceleración de la gravedad, g, y de la masa de la plataforma y los pasajeros, *M*.

1b) ¿En qué punto del descenso se alcanza la velocidad máxima? Determina esta velocidad, $v_{\max}$, en función de *g* y *H*.

2.- Con el proceso anterior, los pasajeros se verían sometidos a un cambio brusco de aceleración tanto al pasar por el punto B como al llegar al suelo, D, algo nada recomendable para su salud. Es por tanto conveniente suavizar el inicio y el final del frenado.

En la práctica se emplean procedimientos de frenado neumáticos o electromecánicos que consiguen un efecto parecido al siguiente: la fuerza de frenado aumenta linealmente entre los puntos B y C de la figura 2, desde una fuerza nula hasta un valor máximo F_m, y después, entre C y D, la fuerza *F* disminuye linealmente hasta un valor igual al peso, *Mg*, como se esquematiza en la figura 3. De esta forma, también la aceleración final es nula y el "aterrizaje" no es violento.

2a) Determina el valor de F_m para que la plataforma llegue al suelo con velocidad nula. Expresa el resultado en función de *M* y *g*, teniendo en cuenta que $h_B = 3H/5$ y $h_C = H/5$.

2b) ¿En qué punto del descenso alcanza la plataforma la velocidad máxima? Determina esta velocidad, $v_{\max}$, en función *g* y *H*.

2c) Calcula la velocidad máxima para una altura de la torre $H = 100$ m.

P1 Solución

1) Esta primera parte del problema, con una fuerza de frenado constante, se puede resolver cinemáticamente, teniendo en cuenta que los movimientos entre A y B y entre B y el suelo, son uniformemente acelerados. Sin embargo, es más sencillo y directo trabajar con las variaciones de energía del sistema.

1a) El trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre *M* debe ser igual a la variación de su energía cinética. Como las velocidades inicial y final son nulas, la suma de los trabajos del peso y de la fuerza de frenado entre A y el suelo ha de ser cero. Es decir

$$W(\text{peso})\Big|_A^{suelo} + W(\text{F}_{\text{frenado}})\Big|_A^{suelo} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad M\,g\,H + \left(-F\,h_B\right) = 0$$

Como $\quad h_B = \dfrac{3}{5}H \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F = \dfrac{5}{3}M\,g}$

1b) La fuerza anterior de frenado *F*, que empieza a actuar en B, es superior al peso, por lo que la velocidad de caída máxima se alcanzará precisamente en B. Hasta ese punto el movimiento es de caída libre, luego

$$v_{max} = \sqrt{2\,g\left(H - h_B\right)} = \sqrt{2\,g\left(H - \frac{3}{5}H\right)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_{max} = \sqrt{\frac{4}{5}\,g\,H}}$$

2a) De nuevo, el trabajo de la fuerza de frenado tiene que ser igual a la variación de la energía potencial gravitatoria. Este trabajo, en valor absoluto, es la suma de las áreas 1, 2 y 3 de la figura 4. Por tanto

$$M\,g\,H = \frac{1}{2}\left(h_B - h_C\right)F_m + \frac{1}{2}\left(h_C - 0\right)\left(F_m - Mg\right) + \left(h_C - 0\right)Mg$$

Sustituyendo $h_B = \dfrac{3}{5}H$ y $h_C = \dfrac{1}{5}H \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_m = 3M\,g}$

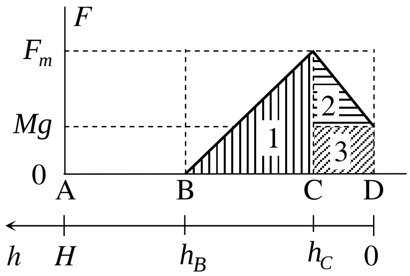


Fig. 4

2b) La velocidad máxima se alcanzará cuando la aceleración sea nula. Esto ocurrirá en el punto E, en el que el peso es contrarrestado por la fuerza de frenado, es decir cuando $F = M\,g$.

Para determinar la altura del punto E establecemos una relación de semejanza entre el triángulo rectángulo de base BC y el sombreado de la figura 5.

$$\frac{Mg}{3Mg} = \frac{h_B - h_E}{h_B - h_C} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{h_E = \frac{7}{15}H}$$

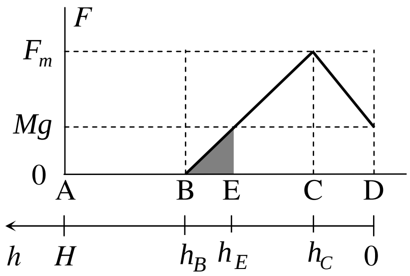


Fig. 5

El valor de la velocidad máxima en E se obtiene igualando el trabajo realizado por todas las fuerzas con la variación de energía cinética entre A y E.

$$M\,g\left(H - h_E\right) - \frac{1}{2}\left(h_B - h_E\right)M\,g = \frac{1}{2}M\,v_{\max}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_{\max} = \sqrt{\frac{14}{15}gH}}$$

2c) Sustituyendo H = 100 m y g = 9,8 m/s^2, se obtiene

$$\boxed{v_{max} = 30{,}2 \text{ m/s} = 109 \text{ km/h}}$$

P2.- Una “brillante” idea.

Un ciudadano, con unos rudimentarios conocimientos de Física, acaba de leer la novela “De la Tierra a la Luna” de Julio Verne. Se le ocurre la idea de utilizar un gran cañón para disparar un proyectil, de masa *m*, capaz de convertirse en un satélite artificial de la Tierra, en una órbita circular de radio $R_T + h$, donde R_T es el radio de la Tierra y *h* es la “altura” sobre la superficie. Supone que, como se muestra en la figura 1, la velocidad inicial del proyectil, v_0, y el ángulo de disparo respecto a la horizontal, φ, son los adecuados para que el proyectil alcance la altura máxima, *h*, en el punto P, donde la velocidad del proyectil, v, es perpendicular a la dirección radial.

Su hipótesis es la siguiente: si la velocidad en P es igual a la velocidad que corresponde a una órbita circular de radio $R_T + h$, el proyectil quedará “atrapado” en dicha órbita. De este modo se convertirá en un satélite artificial, sin necesidad de emplear costosos, complicados y engorrosos cohetes para ponerlo en órbita.

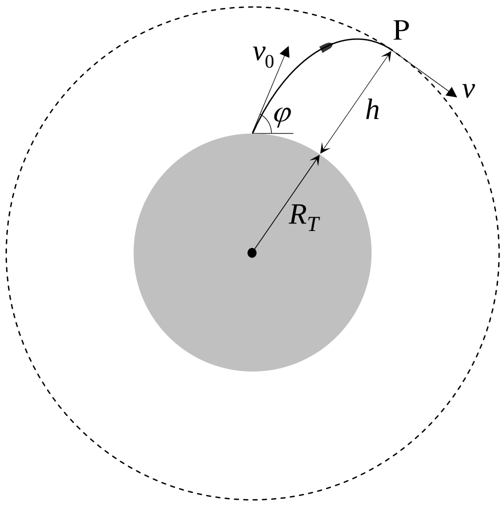


Fig. 1

Para simplificar, desprecia la fricción con la atmósfera y considera la Tierra perfectamente esférica.

a) Escribe las ecuaciones de conservación de la energía mecánica y del momento angular respecto al centro de la Tierra, entre el punto de disparo y el punto P. Considera como datos, además de los antes indicados, la masa M_T de la Tierra y la constante de Gravitación Universal, *G*.

b) A partir de las ecuaciones anteriores demuestra la siguiente expresión:

$$\cos^2 \varphi = \frac{v^2 (R_T + h)^3}{v^2 R_T^2 (R_T + h) + 2GM_T h R_T}$$

c) Determina el módulo de la velocidad, v_s, de un satélite en una órbita circular de radio $R_T + h$.

d) Para que el proyectil entre en la órbita circular se tiene que cumplir que $v = v_s$. Deduce en este caso la expresión del $\cos^2 \varphi$ en función de R_T y *h* y extrae conclusiones acerca de la hipótesis de este ciudadano.

P2 Solución

a) La conservación de la energía mecánica del proyectil y de su momento angular respecto al centro de la Tierra permiten escribir:

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_0^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m v^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h}}$$

$$\boxed{m v_0 R_T \cos\varphi = m v (R_T + h)}$$

b) Eliminando v_0 entre las ecuaciones anteriores y despejando $\cos^2\varphi$ se llega a la expresión dada:

$$\boxed{\cos^2\varphi = \frac{v^2 (R_T + h)^3}{v^2 R_T^2 (R_T + h) + 2GM_T h R_T}} \qquad (1)$$

c) La velocidad, v_s, de un satélite de masa m_s en una órbita circular de radio $R_T + h$ se deduce de

$$G\frac{M_T m_s}{(R_T + h)^2} = m_s \frac{v_s^2}{R_T + h} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_s^2 = \frac{GM_T}{R_T + h}}$$

d) De acuerdo con la hipótesis del ciudadano, si el proyectil se ha de convertir en un satélite artificial en la órbita circular de radio $R_T + h$, su velocidad deberá ser igual a v_s. Por tanto, haciendo $v = v_s$ en (1) se tiene:

$$\cos^2\varphi = \frac{v_s^2 (R_T + h)^3}{v_s^2 R_T^2 (R_T + h) + 2GM_T h R_T} \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2\varphi = \frac{\dfrac{GM_T}{R_T + h}(R_T + h)^3}{\dfrac{GM_T}{R_T + h} R_T^2 (R_T + h) + 2GM_T h R_T}$$

Simplificando,

$$\cos^2\varphi = \frac{(R_T + h)^2}{R_T^2 + 2hR_T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\cos^2\varphi = \frac{R_T^2 + h^2 + 2hR_T}{R_T^2 + 2hR_T}}$$

Como $h^2 \geq 0$ el numerador es mayor o igual que el denominador, y se obtiene $\cos^2\varphi \geq 1$. Pero $\cos^2\varphi$ no puede ser mayor que la unidad, luego la idea del ciudadano no es válida, salvo que $h = 0$ y por consiguiente, $\varphi = 0$. En este caso, la órbita circular sería rasante a la superficie. Menos mal que la Tierra no es perfectamente lisa, de lo contrario el proyectil, al cabo de algo más de 10 minutos del disparo, le atacaría por retaguardia.

P3.- El sexto sentido de los tiburones.

Los tiburones disponen de unos órganos sensoriales especiales, las *ampollas de Lorenzini*, que les permiten detectar el débil campo eléctrico producido por la redistribución de cargas en el cuerpo de sus presas, originada por la contracción de sus músculos. Esta redistribución de cargas responde al sencillo modelo de un *dipolo eléctrico*: dos cargas iguales de signos opuestos, $+Q$ y $-Q$, separadas una distancia L (figura 1).

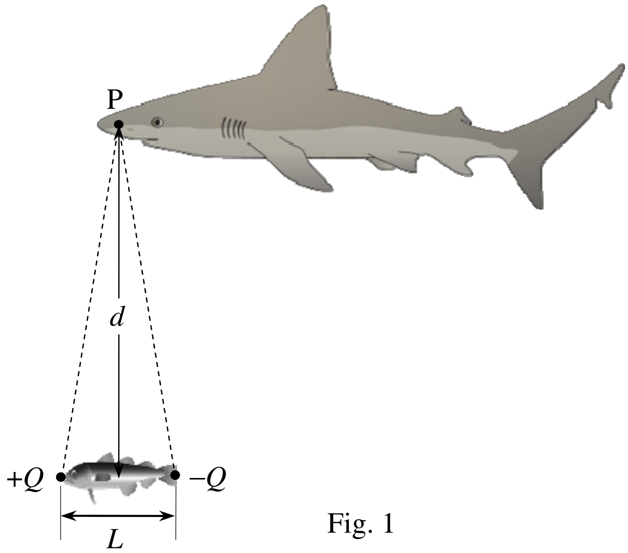


Fig. 1

a) Determina el campo eléctrico producido por el pez (dipolo) en el punto P, situado a una distancia d de su centro y sobre la perpendicular a la línea de unión entre las cargas, como se indica en la figura 1. Expresa el resultado en función de Q, L, d y la constante de Coulomb K.

Como bien sabes, el campo electrostático creado por una carga puntual disminuye con el cuadrado de la distancia, pero el campo creado por un dipolo tiene un comportamiento diferente.

b) A gran distancia del dipolo, es decir cuando $d >> L$, ¿cómo disminuye con d el campo obtenido en el apartado anterior?

El tiburón es capaz de localizar un pez a varios metros de distancia, ya que el umbral de sensibilidad de sus ampollas de Lorenzini, es decir el campo mínimo que pueden detectar, es muy bajo, $E_{min} = 0{,}5\ \mu\text{V/m}$.

c) Calcula el valor de la carga Q si el tiburón es capaz de detectar un pez de longitud $L = 20$ cm a una distancia máxima $d_{max} = 20$ m. Dato: en el agua, $K = 1{,}3 \cdot 10^8\ \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$

Supongamos ahora que el tiburón se acerca al pez en la dirección de la línea que une las cargas (figura 2).

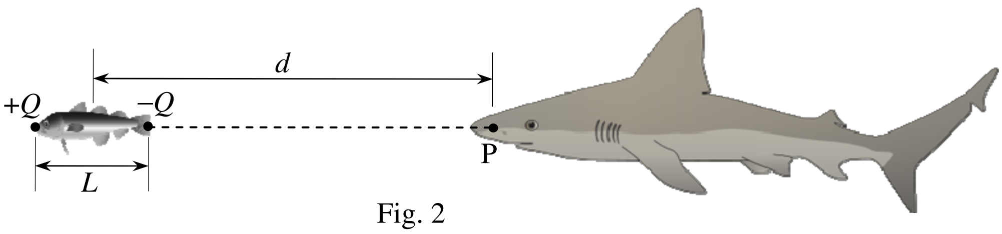


Fig. 2

d) Determina en este caso el campo eléctrico en P, a una distancia d del centro del dipolo.

e) Aproxima tu resultado anterior para distancias muy grandes, es decir $d >> L$.

f) ¿A qué distancia máxima detectará el tiburón al pez?

P3 Solución

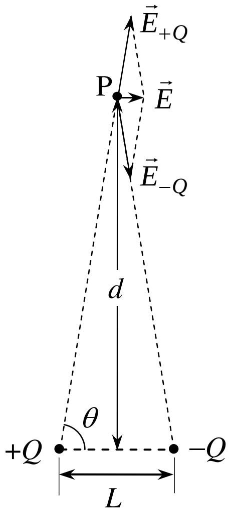


Fig. 3

a) Dado que el punto P está a la misma distancia de las dos cargas y éstas tienen el mismo valor absoluto, los módulos de los campos creados por cada una de las cargas serán iguales

$$E_{+Q} = E_{-Q} = K\frac{Q}{d^2 + (L/2)^2}$$

Según la figura 3, las componentes verticales de los campos tienen sentidos opuestos y se cancelan, mientras que las componentes horizontales se suman, de forma que

$$E = 2E_{+Q}\cos\theta = 2K\frac{Q}{d^2+(L/2)^2}\frac{L/2}{\left[d^2+(L/2)^2\right]^{1/2}} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{E = K\frac{Q\,L}{\left[d^2+(L/2)^2\right]^{3/2}}}$$

b) Si $d >> L$ podemos considerar $d^2 + (L/2)^2 \approx d^2$, y el campo total queda

$$\boxed{E \approx K\frac{Q\,L}{d^3}}$$

Es decir, el campo es inversamente proporcional al cubo de la distancia.

c) El valor de la carga que produce un campo E_{min} a la distancia d_{max} se obtiene despejando Q de la ecuación anterior,

$$Q = \frac{E_{\text{min}}\, d^3_{\text{max}}}{K\,L} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q = 1{,}54\cdot 10^{-10}\ \text{C} = 9{,}6\cdot 10^{8}\ e}$$

d) En esta nueva situación sólo tenemos componentes en dirección horizontal, en sentidos opuestos, tal como muestra la figura 4.

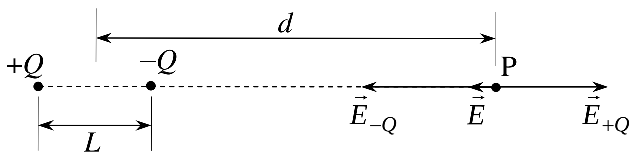


Fig. 4

El campo total será ahora

$$E = K\left[\frac{Q}{(d-L/2)^2} - \frac{Q}{(d+L/2)^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 2K\frac{Q\,L\,d}{\left[d^2-(L/2)^2\right]^2}}$$

e) Si $d >> L$ podemos considerar que $d^2 - (L/2)^2 \approx d^2$, de modo que el campo total queda

$$\boxed{E \approx 2K\frac{Q\,L}{d^3}}$$

Este campo disminuye también con el cubo de la distancia, pero es el doble del calculado en el apartado b).

f) A partir del módulo de E puede despejarse la distancia d_{max} en función del resto de parámetros

$$d_{\text{max}} = \left(2K\frac{Q\,L}{E_{\text{min}}}\right)^{1/3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d_{\text{max}} = 25{,}2\ \text{m}}$$

Esta distancia es $2^{1/3}$ = 1,26 veces mayor que la distancia máxima d_{max} del apartado c).