



**Universidad  
Zaragoza**



# 25 ANIVERSARIO

## 1ª PRUEBA

21 de febrero de 2014



Subvenciona:



## P1.- El Zodíaco, la Tierra, un Satélite y el Patio de la Infanta.

Los astros, sus movimientos y sus posiciones respecto a La Tierra han sido uno de los principales motivos de “curiosidad científica” en todas las culturas, desde los tiempos más remotos. Esta curiosidad propició el nacimiento de una Ciencia, la Astronomía, pero también ha dado lugar a otros enfoques esotéricos, arbitrarios e inciertos, nada científicos, rodeados siempre de un carácter adivinatorio y envueltos en un halo de misterio, que constituyen la astrología.

Sin embargo, a la astrología se han dedicado y se dedican ríos de tinta, y está fuera de dudas su influencia en la literatura y en el arte a lo largo de los siglos. A este respecto, en Zaragoza existe una excepcional obra del renacimiento aragonés que, entre su profusa decoración escultórica, presenta numerosos símbolos astrales y zodiacales. Se trata del “Patio de la Infanta”, del siglo XVI, que se encuentra en la Sede Central de IberCaja, (figuras 1 y 2). Precisamente este recinto ha sido el lugar que IberCaja ha ofrecido para realizar el Acto de Entrega de Premios de la Olimpiada Aragonesa de Física, ¡desde hace 25 años!



Fig. 1  
Patio de la Infanta

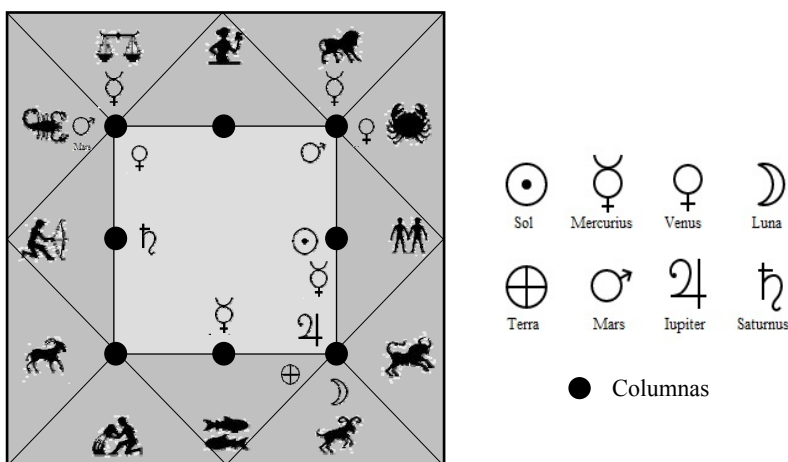


Fig. 2  
Planta del Patio. Símbolos astrológicos.

El Zodíaco es una zona o faja celeste por el centro de la cual pasa la eclíptica<sup>1</sup>. Comprende las 12 constelaciones, “signos” o “casas” que recorre el Sol en su curso anual aparente. Estas constelaciones se consideran regularmente espaciadas cada 30°, y están representadas con su símbolo habitual en la figura 3. Sus nombres son Aries, Tauro, Géminis, Cáncer, Leo, Virgo, Libra, Escorpio, Sagitario, Capricornio, Acuario y Piscis.

La distancia de la Tierra a cualquier constelación del Zodíaco es enorme, en comparación con el tamaño de la Tierra. Por ejemplo, la distancia a Aldebarán, una de las estrellas de Tauro, es del orden de 65 años luz.

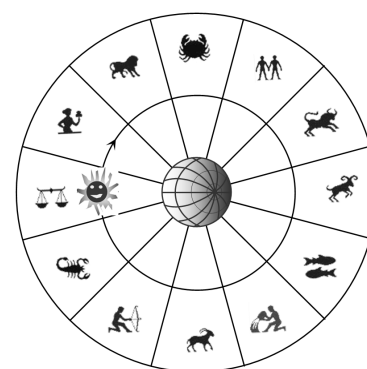


Fig. 3

<sup>1</sup> Círculo formado por la intersección del plano de la órbita terrestre con la esfera celeste, y que aparentemente recorre el Sol, visto desde la Tierra, durante un año.

Un observador terrestre está situado en un punto A de la superficie de la Tierra. En su cénit se encuentra la constelación Aries, como se observa en la figura 4, que no está representada a escala.

Desde el punto A se observa un satélite artificial, S, que describe una órbita circular de radio  $OP = a$ , donde O es el centro de la Tierra. Tanto el punto A como la órbita del satélite se encuentran en el plano de la eclíptica.

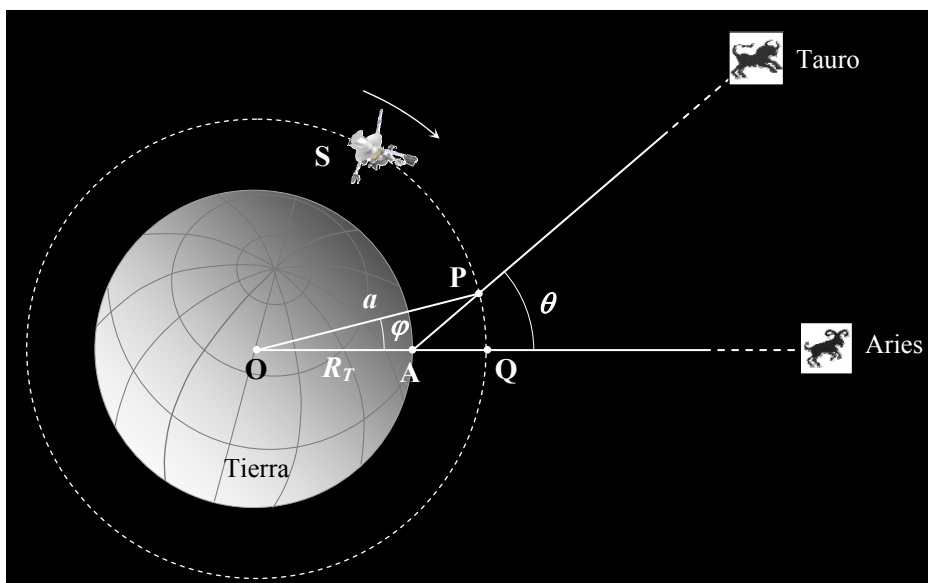


Fig. 4

- a) Determina la expresión del periodo de revolución del satélite,  $T$ , en función del radio  $a$  de su órbita, del radio de la Tierra,  $R_T$ , y de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra,  $g$ .

El ángulo  $\theta$ , indicado en la figura 4, es el que forma la dirección de la visual desde A al satélite cuando está en P, alineado con la constelación Tauro, y la visual cuando el satélite está en Q, alineado con Aries.

- b) Demuestra que el ángulo  $\theta$  está relacionado con el radio de la Tierra,  $R_T$ , el radio de la órbita del satélite,  $a$ , y el ángulo  $\varphi$  que forma OP con OA, en la forma

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{a \cos \varphi - R_T}$$

- c) ¿Qué valor aproximado tiene el ángulo  $\theta$ ?
- d) Calcula el radio  $a$  de la órbita del satélite en el caso de que  $\varphi = 1,94^\circ$ .
- e) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el observador en A ve pasar el satélite por P hasta que lo ve pasar por Q?

Datos: Radio de la Tierra:  $R_T = 6,37 \times 10^6$  m

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

## P1 Solución

- a) Dado que el satélite describe una órbita circular de radio  $a$  en torno a la Tierra, se verifica que

$$G \frac{M_T m}{a^2} = m \omega^2 a \quad (1)$$

Donde  $M_T$  es la masa de la Tierra,  $m$  la masa del satélite,  $G$  la constante de Gravitación universal y  $\omega = 2\pi/T$ , siendo  $T$  el periodo de revolución del satélite. Como la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es  $g = GM_T/R_T^2$ , en la que  $R_T$  es el radio de la Tierra, la expresión (1) se puede escribir

$$g \frac{R_T^2}{a^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{R_T} \left(\frac{a^3}{g}\right)^{1/2}} \quad (2)$$

- b) De la figura 5, que es una ampliación de una parte de la figura 4, se deduce

$$\left. \begin{aligned} AP \operatorname{sen} \theta &= a \operatorname{sen} \varphi \\ AP \operatorname{cos} \theta &= a \operatorname{cos} \varphi - R_T \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dividiendo miembro a miembro en (3), se obtiene la relación buscada

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{a \operatorname{cos} \varphi - R_T}} \quad (4)$$

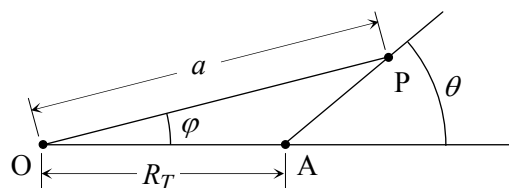


Fig. 5

- c) La distancia entre la Tierra y cualquiera de las constelaciones del zodiaco es muchísimo mayor que el radio de la Tierra ( $6,37 \times 10^3$  km). Por ejemplo, la estrella Aldebarán, representativa de Tauro, está a 65 años luz, que equivale a  $6,1 \times 10^{14}$  km. En consecuencia, las direcciones de las visuales a Tauro desde A y desde el centro de la Tierra, pueden considerarse paralelas. Por otra parte, tal como indica el enunciado, las casas del zodiaco están regularmente espaciadas cada  $30^\circ$ . En definitiva, se tiene que

$$\boxed{\theta = 30^\circ}$$

- d) De (4) se deduce que

$$a = R_T \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta \operatorname{cos} \varphi - \operatorname{sen} \varphi}$$

Con  $\theta = 30^\circ$ ,  $\varphi = 1,94^\circ$  y  $R_T = 6,37 \times 10^6$  m, resulta

$$\boxed{a = 6,77 \times 10^6 \text{ m}}$$

- e) Como la velocidad angular orbital del satélite es constante, el tiempo  $\tau$  que transcurrirá desde que el observador A ve pasar el satélite por P hasta que lo hace por Q, viene dado por

$$\frac{\varphi(\text{rad})}{\tau} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \tau = \frac{\varphi(\text{rad})}{2\pi} T = \frac{\varphi(^{\circ})}{360} T$$

El valor numérico del periodo  $T$  se obtiene de (2)

$$T = 5,55 \times 10^3 \text{ s}$$

En total

$$\boxed{\tau = 29,9 \text{ s}}$$

## P2.- ¿Se puede medir la altura de una gruta con la fotografía de una gota?<sup>2</sup>

Un montañero iba a hacer una fotografía desde el interior de una gruta<sup>3</sup> hacia el exterior, y al enfocar el paisaje vio que en el borde superior de la entrada había una incipiente estalactita de la que estaba a punto de caer una gota de agua. Cuando observó que la gota se desprendía, disparó su cámara fotográfica, con un tiempo de exposición  $\Delta t = (1/45)\text{s}$  (tiempo durante el que llega luz al fotosensor). La fotografía obtenida se muestra en la figura 1. Aproximadamente en su centro se observa el trazo de la gota durante la exposición, reforzado para que se visualice mejor. A la derecha de la foto se ha añadido una regla, graduada en unidades arbitrarias, para poder medir las distancias que consideres oportunas.



Fig. 1

Despreciando la resistencia del aire y el empuje hidrostático, y sabiendo que la gravedad es  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ , haz una estimación de:

- El tiempo de reacción del montañero, es decir el tiempo que transcurre desde que se desprende la gota hasta que dispara la cámara.
- La distancia recorrida por la gota durante el tiempo anterior.
- La altura de la entrada de la gruta.

<sup>2</sup> Este ejercicio está inspirado en una cuestión propuesta en la Olimpiada Aragonesa de Física en el año 2003.

<sup>3</sup> Esta gruta está situada en las inmediaciones de Escalona, en la comarca del Serrablo (Huesca).

## P2 Solución

En primer lugar, haciendo uso de la regla de la figura 1, pueden determinarse las distancias características del proceso de caída de la gota: la longitud de la traza de la gota durante la exposición,  $\Delta z$ , la distancia recorrida por la gota hasta el instante del disparo de la cámara,  $z_0$ , y la altura de la gruta,  $h$ . Estas distancias se indican en la figura 2 y sus medidas, expresadas en unidades arbitrarias (u.a.), van a ser los datos del problema.

Los resultados de las medidas son:

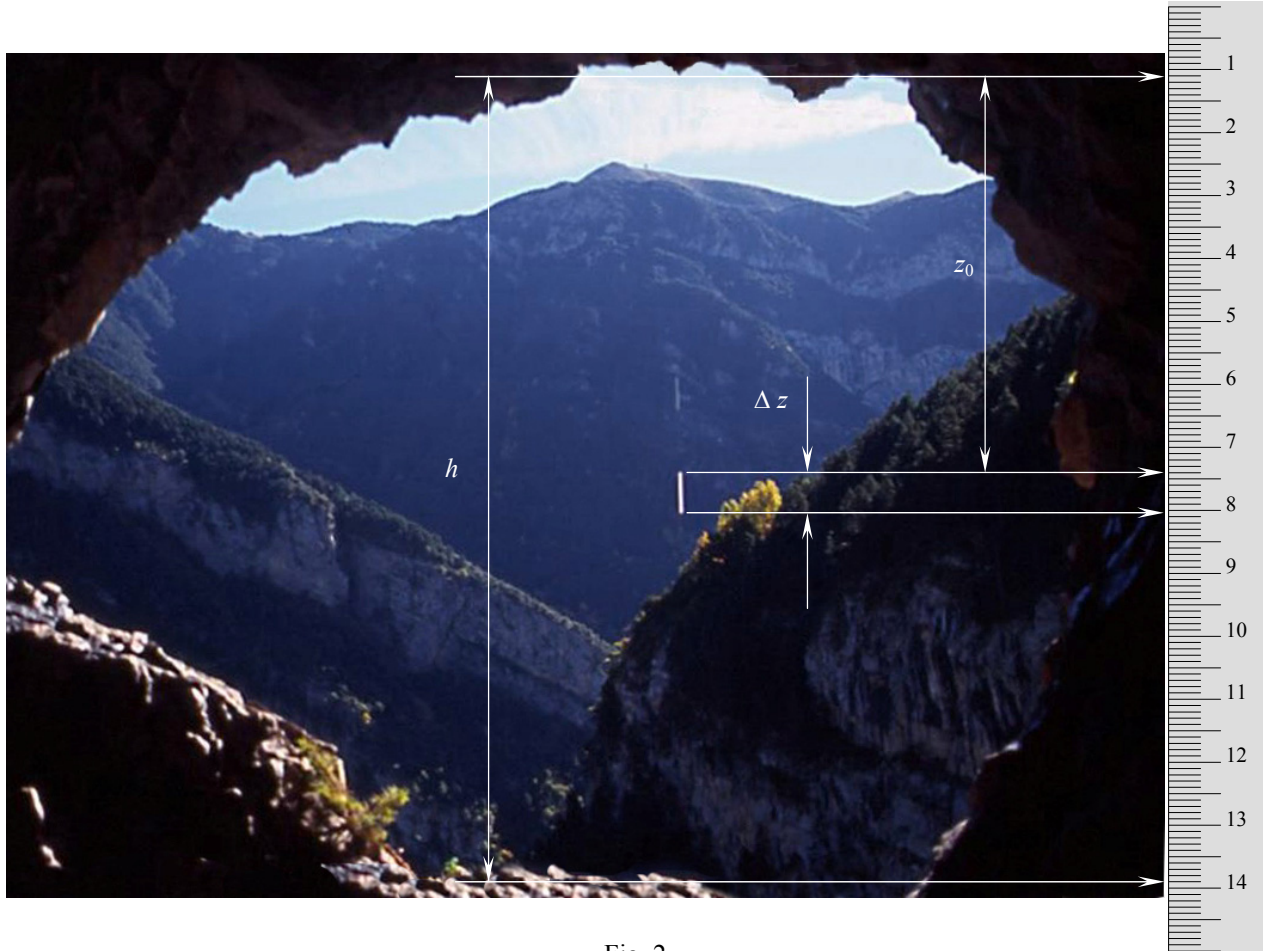


Fig. 2

$$\Delta z = 0,6 \text{ u.a.} \quad z_0 = 6,3 \text{ u.a.} \quad h = 12,8 \text{ u.a.}$$

Expresadas en metros, las anteriores longitudes son, respectivamente,

$$\Delta Z = f \Delta z \quad Z_0 = f z_0 \quad H = f h$$

Donde  $f$  es el factor de conversión de las unidades arbitrarias a metros, en principio desconocido.

- a) Despreciando la resistencia del aire, la gota cae desde el reposo con aceleración  $g$ . Si  $t_0$  es el tiempo que transcurre desde que se desprende la gota hasta que se dispara la cámara (tiempo de reacción del montañero), la velocidad de la gota en el instante del disparo es

$$v_0 = g t_0 \quad (1)$$

El espacio recorrido por la gota en este tiempo es

$$Z_0 = \frac{1}{2} g t_0^2 \quad (2)$$

Por otra parte, como  $\Delta Z \ll Z_0$  y el tiempo de exposición es muy breve, podemos considerar que la gota se mueve con velocidad aproximadamente constante  $v_0$  durante la exposición, de forma que

$$\Delta Z = v_0 \Delta t \quad (3)$$

Las relaciones (2) y (3) pueden expresarse en función de los datos y del factor de conversión

$$f z_0 = \frac{1}{2} g t_0^2 \quad (4)$$

$$f \Delta z = v_0 \Delta t \quad (5)$$

Dividiendo miembro a miembro (4) y (5) y teniendo en cuenta (1), resulta

$$t_0 = \frac{2z_0}{\Delta z} \Delta t$$

Esta expresión es independiente de  $f$ . Con los datos numéricos anteriores y  $\Delta t = (1/45)$  s se obtiene

$$t_0 = 0,47 \text{ s}$$

- b) Sustituyendo directamente  $t_0$  en (2) se calcula la distancia  $Z_0$

$$Z_0 = 1,1 \text{ m}$$

- c) Para calcular la altura de la entrada de la gruta,  $H$ , se necesita el factor de conversión  $f$ . Su valor es

$$f = \frac{Z_0}{z_0} \Rightarrow f = 0,17 \text{ m/u.a.}$$

Por lo que la altura es

$$H = f h \Rightarrow H = 2,2 \text{ m}$$

Nota: las medidas sobre la fotografía tienen una precisión muy baja. En particular, la medida de  $h$  es muy imprecisa porque no está muy claro dónde está el suelo de la gruta. También tiene una precisión relativa muy baja la medida de  $\Delta z$ , por ser una distancia sólo un poco mayor que la resolución de la regla. Por todo ello, los resultados numéricos son simples estimaciones de los valores reales.

### P3.- Un juguete sorprendente: el generador de Van de Graaff.

Cuando los físicos quieren visualizar en las aulas, o en los museos de las ciencias, los efectos de los campos y las fuerzas eléctricas, utilizan a veces un dispositivo llamada *generador de Van de Graaff*. En esencia, es una esfera metálica sobre la que, por procedimientos mecánicos, se va depositando una carga  $Q$  que produce un intenso campo eléctrico en el exterior.

Uno de los experimentos típicos consiste en cargar paulatinamente la esfera hasta que salta una espectacular chispa. Lo que ha ocurrido es que el campo eléctrico exterior es tan intenso que llega a ionizar las moléculas del aire, de forma que se produce una brusca corriente eléctrica con emisión de luz visible por colisiones de las cargas libres con otras moléculas del aire.

El campo de ruptura dieléctrica del aire seco, es decir el máximo campo eléctrico que soporta antes de ionizarse, es  $E_{\max} = 3 \text{ MV/m}$ .

- a) Determina la carga máxima,  $Q_{\max}$ , que se puede suministrar a la esfera de un Van de Graaff, de radio  $R = 10 \text{ cm}$ , para que no se produzca la ruptura dieléctrica del aire en su entorno. ¿Qué potencial alcanza la esfera en esta situación?

Ayuda: un conductor en equilibrio electrostático constituye un volumen equipotencial, y la carga eléctrica se distribuye exclusivamente sobre su superficie. El campo y el potencial electrostáticos en su exterior son los mismos que los creados por una partícula con la misma carga neta que la esfera y situada en su centro.

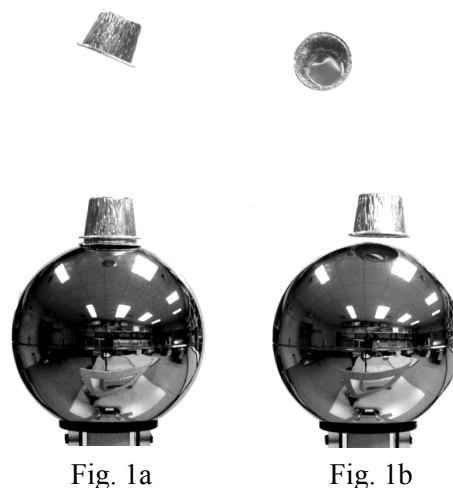
Otro de los experimentos que se puede realizar con un Van de Graaff consiste en colocar encima de la esfera varios moldes de papel de aluminio, que se cargan conjuntamente con la esfera, y ver cómo el campo eléctrico los lanza hacia arriba de uno en uno (Figuras 1a y 1b).

El estudio riguroso del movimiento de los moldes es complejo. Para poder hacer cálculos aproximados, vamos a hacer algunas suposiciones:

- Cuando el molde se separa de la esfera se lleva una parte de la carga del sistema, pero el generador aporta casi instantáneamente esa misma carga a la esfera, de forma que se mantiene constante su potencial.
- El molde es mucho más pequeño que la esfera, y puede considerarse puntual.
- La distribución de carga sobre la esfera mantiene siempre una simetría esférica. No se considera por tanto la influencia de la carga del molde, que cuando está próximo a la esfera perturba ligeramente esta simetría.
- No se considera el rozamiento con el aire.
- Cuando el molde salta, sigue una trayectoria recta en dirección vertical.

Suponiendo que la esfera se carga a un potencial  $V_0 = 225 \text{ kV}$ , y que sobre ella se pone un único molde de masa  $m = 3,0 \text{ g}$  y con carga  $q = 7,5 \times 10^{-2} \mu\text{C}$ , determina y calcula:

- b) La carga que adquiere la esfera,  $Q$ .





- c) La aceleración del molde,  $a_0$ , cuando se separa de la superficie de la esfera (punto  $A$  de la figura 2).
- d) La máxima distancia al centro de la esfera que llega a alcanzar,  $r_B$ , antes de caer.
- e) La distancia  $r_C$  al punto donde la velocidad del molde es máxima.
- f) El valor de esta velocidad máxima,  $v_{\max}$ .

Supón ahora que se colocan varios moldes, uno encima de otro, sin rozamiento entre ellos.

- g) Explica por qué los moldes saltan de uno en uno, y no todos a la vez.

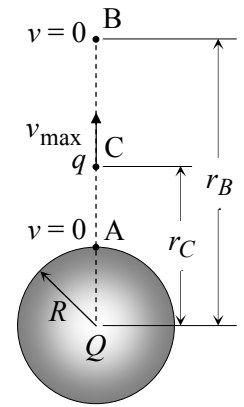


Fig. 2

Datos: Constante de Coulomb,  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$ .

Aceleración de la gravedad,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

### P3 Solución

- a) Como se indica en el enunciado, la carga de la esfera conductora se distribuye en la superficie, pero el campo eléctrico en el exterior de la esfera es el mismo que si toda la carga  $Q$  estuviese concentrada en el centro de la esfera, es decir con dirección radial y módulo

$$E = k \frac{Q}{r^2}$$

La mayor intensidad de este campo se tiene junto a la superficie del conductor, es decir cuando  $r = R$ . En el límite de que este campo sea igual al de ruptura dieléctrica

$$E_{\max} = k \frac{Q_{\max}}{R^2} \Rightarrow \boxed{Q_{\max} = \frac{R^2}{k} E_{\max}} \Rightarrow \boxed{Q_{\max} = 3,3 \mu\text{C}}$$

El potencial de la esfera es, en este caso

$$\boxed{V_{\max} = k \frac{Q_{\max}}{R} = E_{\max} R} \Rightarrow \boxed{V_{\max} = 3,0 \times 10^5 \text{ V}}$$

- b) La carga de la esfera es

$$V = k \frac{Q}{R} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{VR}{k}} \Rightarrow \boxed{Q = 2,5 \mu\text{C}}$$

- c) Dos cargas de igual signo se repelen. Sobre el molde situado en la parte superior de la esfera actúa una fuerza resultante hacia arriba  $F = F_e - F_g$ , siendo  $F_e$  la fuerza eléctrica de repulsión y  $F_g$  la fuerza gravitatoria, es decir, el peso del molde. Para calcular la fuerza de interacción entre la esfera y un molde, supuesto puntual, podemos utilizar la ley de Coulomb, como si fuesen dos partículas cargadas.

$$F = k \frac{Qq}{R^2} - mg = ma \Rightarrow \boxed{a = k \frac{Qq}{mR^2} - g} \Rightarrow \boxed{a = 46 \text{ m/s}^2}$$

- d) En una primera fase del recorrido el molde parte del reposo y se acelera hacia arriba, ya que  $F_e > F_g$ . En un punto determinado, C, las fuerzas se igualan y a partir de entonces  $F_e < F_g$ , por lo que el molde reduce su velocidad hasta que, en el punto más alto, la velocidad vuelve a anularse.

Las fuerzas  $F_e$  y  $F_g$  son conservativas, por lo que la energía mecánica del molde se conserva. Tanto en el punto inicial, A, como en el más alto, B, la energía cinética es nula, luego

$$k \frac{Qq}{R} + mgR = k \frac{Qq}{r_B} + mgr_B$$

Operando, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado en  $r_B$

$$r_B^2 - \left( k \frac{Qq}{mgR} + R \right) r_B + k \frac{Qq}{mg} = 0$$

Sustituyendo los datos (en el SI), se obtiene

$$r_B^2 - 0,674r_B + 0,0574 = 0$$

De las dos soluciones de la ecuación, una de ellas es la trivial,  $r_B = 0,10 \text{ m} = R$ , que corresponde a la posición inicial. La otra, correspondiente al punto más alto B, resulta

$$\boxed{r_B = 0,57 \text{ m}}$$

- e) La velocidad ascendente del molde aumenta hasta el punto C, en el que se igualan en módulo las fuerzas gravitatoria y electrostática. En este punto la aceleración del molde es nula y la velocidad es máxima,  $v_{\max}$ . Por tanto, en C se cumple

$$k \frac{Qq}{r_C^2} = mg \quad \Rightarrow \quad r_C = \sqrt{k \frac{Qq}{mg}} \quad \Rightarrow \quad r_C = 0,24 \text{ m}$$

- f) La conservación de la energía mecánica entre los puntos A y C permite escribir

$$k \frac{Qq}{R} + mgR = k \frac{Qq}{r_C} + mgr_C + \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \quad \Rightarrow$$

$$v_{\max} = \sqrt{2 \left[ k \frac{Qq}{m} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_C} \right) - g(r_C - R) \right]} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = 2,0 \text{ m/s}$$

- g) Podría pensarse que, cuando hay varios moldes superpuestos, se cargan todos a la vez y el conjunto es repelido en bloque por la esfera. Esto no es correcto porque, como se indica en la “ayuda” del enunciado, la carga de un cuerpo conductor en equilibrio se distribuye en su superficie. En nuestro caso el cuerpo conductor total es la esfera más los moldes apilados en su vértice superior, de forma que únicamente el molde más exterior forma parte de la superficie del conjunto. Por tanto, el único que se carga inicialmente es el que está en el exterior, es decir el más alto. Cuando este molde salta y se aleja, el que era segundo molde pasa a formar parte de la superficie del conductor, se carga y es repelido por la esfera, y así sucesivamente.