REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA

XIX Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

PRIMERA PRUEBA

29 de febrero de 2008

INSTRUCCIONES:

Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas

Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

iberCaja

P1 El lanzamiento del Pabellón-Puente

El *Pabellón-Puente*, uno de los edificios emblemáticos de EXPO 2008, es un amplio espacio expositivo sobre el Ebro, diseñado por la prestigiosa arquitecta iraquí Zaha Hadid. Su construcción ha supuesto un enorme reto tecnológico, ya que su total falta de simetría ha obligado a diseñar por separado cada una de sus piezas metálicas. Una mitad del puente ha sido construida *in situ* aprovechando una pequeña isla natural en el cauce del río. La otra mitad se ha hecho en tierra firme, en la ribera derecha, de forma que una vez terminada ha sido preciso "lanzarla" para ensamblarla con la primera mitad.

La fotografía de la figura 1.a muestra el inicio del lanzamiento. Puede apreciarse a la izquierda la gran estructura provisional levantada para realizar el lanzamiento. En la figura 1.b se ve la parte delantera del puente que está siendo lanzado. La figura 1.c corresponde al final del lanzamiento, con las dos mitades del puente preparadas para su unión. (Las fotografías son cortesía de EXPO 2008).

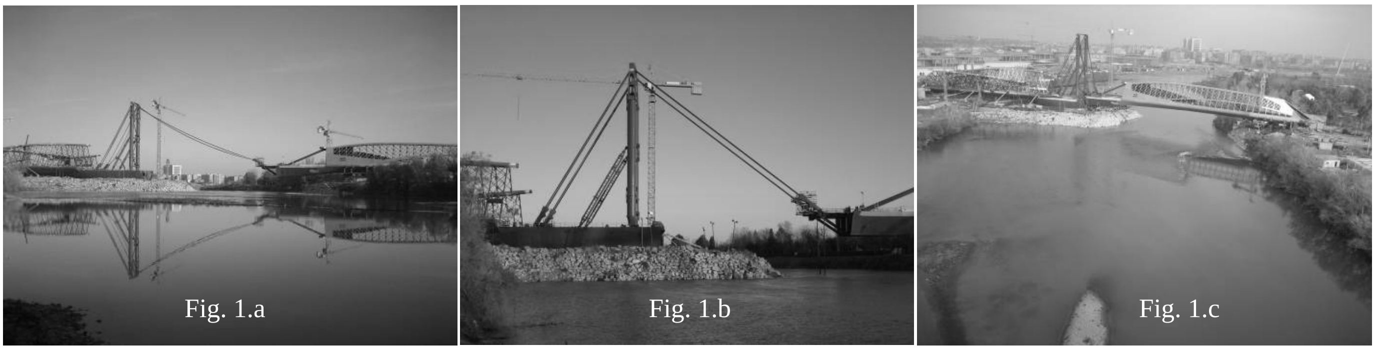


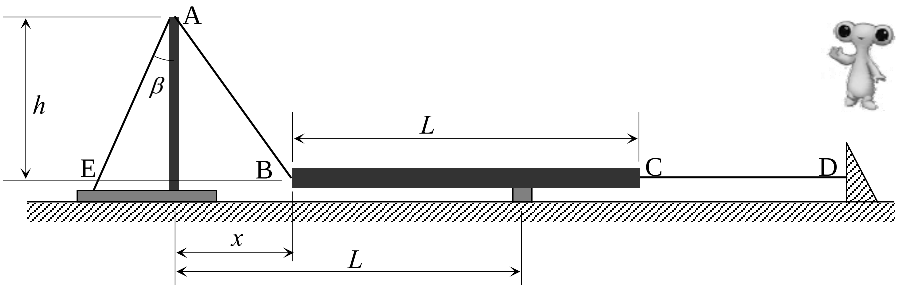
Fig. 1.a Fig. 1.b Fig. 1.c

El complejo proceso del lanzamiento del puente, maniobra sin precedentes, se llevó a cabo muy lentamente, de forma que en todo momento se pudiese considerar en equilibrio estático. En Física este tipo de proceso se denomina *cuasiestático*.

Para realizar un estudio preliminar se recurre, como también es habitual en Física, a un *modelo* simplificado. Con este modelo se pueden hacer cálculos estimativos, que son el objeto de este problema.

En el modelo que se presenta (figura 2) se considera al puente como una barra homogénea de longitud L y masa M, que se apoya sin rozamiento sobre una base fija, que constituye el estribo derecho del puente. Así mismo, se considera que la estructura provisional es un poste vertical rígido de altura h, apoyado en lo que será el estribo central. De este poste se tienden dos cables, uno AE de longitud fija, hacia una sujeción provisional y el otro AB, hacia la barra. Acortando lentamente este último cable, la barra se desplaza hacia la izquierda. Para que en todo momento se conserve el equilibrio es necesario un tercer cable CD prácticamente horizontal, que une la parte derecha de la barra con otro soporte fijo. Lógicamente, el desplazamiento de la barra exige que la longitud de este tercer cable aumente.

Fig. 2



Utilizando este modelo, responde a las siguientes cuestiones:

a) Determina las tensiones T_1 y T_2 en los cables AB y CD cuando la distancia del extremo B de la barra a la columna es x. Puede despreciarse el rozamiento entre la barra y el soporte.

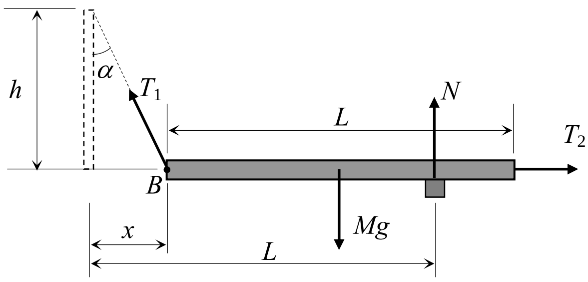
b) Dibuja de forma aproximada la grafica de T_2 en función de x, desde $x = 0$ hasta $x = L/2$, y determina la distancia x_m para la cual la tensión T_2 es máxima, así como la expresión del valor máximo T_{2max} de dicha tensión.

c) Si $M = 2{,}2\cdot 10^6\ \mathrm{kg}$, $L = 120{,}0\ \mathrm{m}$ y $h = 40{,}0\ \mathrm{m}$, calcula el valor de $T_{2\mathrm{max}}$.

d) Si $\beta = 30^{\circ}$, determina y calcula el valor de la tensión del cable AE, T_{3max}, cuando T_2 es máxima. Supón que la fuerza de reacción del suelo sobre el poste es vertical.

a) Consideramos la barra como sistema mecánico en equilibrio, cuando su extremo derecho se encuentra a una distancia x de la base del poste. Las fuerzas exteriores que actúan, representadas en la figura 3, son las tensiones T_1 y T_2 , el peso Mg y la reacción normal N del soporte. Llamamos α al ángulo que forma el cable AB con la vertical.

Fig. 3



La condición de equilibrio del sistema impone, por una parte, que la suma de todas las fuerzas exteriores sea igual a cero y, por otra, que el momento resultante de las fuerzas exteriores respecto a cualquier punto sea nulo.
Por lo tanto, de la primera condición, la suma de las componentes de las fuerzas según la horizontal y según la vertical deben ser cero, es decir,

$$T_1 sen\,\alpha - T_2 = 0 \qquad (1)$$

$$T_1 \cos\alpha + N - mg = 0 \qquad (2)$$

Tomando como origen de momentos el punto B, de la segunda condición se tiene

$$Mg\frac{L}{2} - N(L-x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = Mg\frac{L}{2(L-x)}$$

Sustituyendo en (2)

$$T_1 \cos\alpha = \frac{L-2x}{2(L-x)}Mg \qquad (3)$$

Dividiendo miembro a miembro (1) y (3) y despejando T_2

$$T_2 = Mg\frac{L-2x}{2(L-x)}\operatorname{tg}\alpha$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{tg}\alpha = x/h$, resulta,

$$\boxed{T_2 = \frac{Mg}{2h}\frac{(L-2x)x}{(L-x)}}$$

Sustituyendo en (1) y despejando T_1 ,

$$T_1 = Mg\frac{L-2x}{2(L-x)}\frac{1}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_1 = \frac{Mg}{2h}\frac{(L-2x)x}{(L-x)}\sqrt{1+\frac{x^2}{h^2}}}$$

b) Como era de esperar, las tensiones T_1 y T_2 son funciones de x. Para hacer una representación gráfica de $T_2(x)$ en el rango $0 \le x \le L/2$ que es el de interés en el problema, conviene comenzar por los "puntos de corte" con el eje de abscisas:

$$T_2(x=0) = 0 \qquad \text{y} \qquad T_2(x = L/2) = 0$$

Por otra parte, en el rango citado $T_2(x) > 0$, luego para un cierto valor x_m tiene que tener un máximo cuya determinación exige

$$\frac{dT_2}{dx} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2 - 4Lx + L^2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación de segundo grado son

$$x = L\left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{cases} 1{,}7L \\ 0{,}30L \end{cases}$$

Como la primera solución, corresponde a un valor de la distancia x mayor que L, fuera del rango de interés, nos quedamos con la segunda, por lo que

$$\boxed{x_m = 0{,}30L}$$

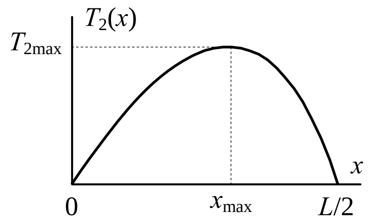


Fig. 4

El valor $T_{2\max}$ de la tensión máxima es

$$\boxed{T_{2max} = 8{,}6 \cdot 10^{-2}\, Mg \frac{L}{h}}$$

Estos resultados son suficientes para poder trazar la gráfica aproximada de $T_2(x)$ que se muestra en la figura 4.

c) Con los datos del enunciado, se obtiene

$$x_m = 36\,\text{m} \qquad \text{y} \qquad \boxed{T_{2max} = 5{,}5 \cdot 10^{6}\ \text{N}}$$

d) Si la reacción del suelo sobre el soporte es vertical, tal como indica el enunciado, significa que la resultante de las tensiones $\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_3$ tiene que ser también vertical, para que el poste permanezca en equilibrio, como se indica en la figura 5. Por lo tanto las componentes horizontales de dichas tensiones verifican que

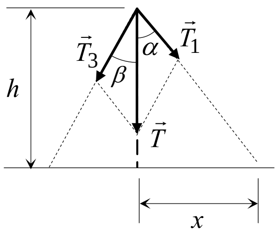


Fig. 5

$$T_3 \operatorname{sen}\beta = T_1 \operatorname{sen}\alpha \qquad \Rightarrow \qquad T_3 = \frac{T_1 \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$$

Teniendo en cuenta (1),

$$T_3 = \frac{T_2}{\operatorname{sen}\beta}$$

Como se pide el valor T_3 para T_2 máxima, se tiene que

$$\boxed{T_{3max} = \frac{T_{2max}}{\operatorname{sen}\beta}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T_3 = 1{,}1 \cdot 10^{7}\ \text{N}}$$

Nota: en el modelo simplificado que se ha adoptado en este problema, no se ha tenido en cuenta la estructura rígida inclinada, paralela a los cables EA, y claramente visible en la serie de fotos de la figura 1, cuya finalidad es dar rigidez al poste. Su inclusión en el modelo supondría una complicación excesiva para el nivel que se ha pretendido dar a este ejercicio.

P2 Un disparo real

Un cañón ajustado con un ángulo de tiro α, dispara un proyectil con una velocidad inicial v_0. Si se considera despreciable la fricción con el aire,

a) Determina la expresión del alcance horizontal R.
b) Calcula el valor de este alcance si v_0 = 470 m/s y α = 40º. Toma como valor de la aceleración de la gravedad $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.
c) Si la velocidad inicial v_0 se conoce con una imprecisión del ± 2%, determina la incertidumbre del alcance horizontal suponiendo que la medida del ángulo de disparo está exenta de errores.

El Regimiento de Artillería de Campaña ATP nº 20 de la Brigada de Caballería "Castillejos II" de Zaragoza, utiliza una pieza obús ATP-109 autopropulsada, de calibre 155/32. El proyectil, de masa m = 40 kg , lleva una velocidad $v_0 = 470\,m/s$ al salir de la pieza. Cuando el ángulo de tiro se ajusta a 40º, el alcance horizontal es de 4.400 m.

d) Con las aproximaciones que estimes conveniente, haz una estimación de las pérdidas energéticas debidas a la fricción con el aire de este proyectil.

En la figura 1 se muestra un esquema, a escala, de las trayectorias del proyectil con y sin fricción con el aire.

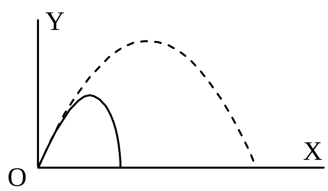
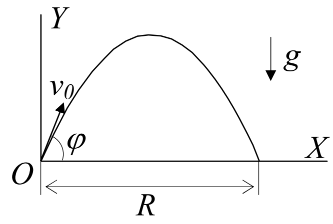


Fig. 1

P2. Un disparo real **Solución**

a) Ecuaciones del movimiento en el Sistema de Referencia de la figura:



$$\text{Eje X} \begin{cases} a_x = 0 \\ v_x = v_0 \cos\varphi \\ x = v_0 \cos\varphi\, t \end{cases} \qquad \text{Eje Y} \begin{cases} a_y = -g \\ v_y = v_0 \operatorname{sen}\varphi - g\,t \\ y = v_0 \operatorname{sen}\varphi\, t - g\,t^2/2 \end{cases} \qquad (1)$$

Eliminando t entre x e y de las expresiones (1), se obtiene la ecuación de la trayectoria:

$$y = \operatorname{tg}\varphi\, x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\varphi} x^2 \qquad (2)$$

Si en (2) se hace $y = 0$, el valor de x corresponde al alcance horizontal R

$$\boxed{R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\varphi}{g}} \qquad (3)$$

b) Sustituyendo los valores de g, φ y v_0 en la ecuación anterior, se obtiene

$$\boxed{R = 22.000 \text{ m}}$$

c) Una imprecisión Δv_0 en la determinación de la velocidad de salida del proyectil, provoca que el valor del alcance R esté comprendido entre

$$R_{max} = \frac{2(v_0 + \Delta v_0)^2}{g} \operatorname{sen} 2\varphi \qquad R_{min} = \frac{2(v_0 - \Delta v_0)^2}{g} \operatorname{sen} 2\varphi$$

Lo que nos permite evaluar la incertidumbre ΔR en el alcance como el promedio de los valores anteriores

$$\Delta R = \frac{R_{max} - R_{min}}{2} = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{g} \frac{\left[(v_0 + \Delta v_0)^2 + (v_0 - \Delta v_0)^2\right]}{2} = \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{g} \Delta v_0$$

Dividiendo los miembros de la ecuación anterior por (3), se obtiene la imprecisión relativa en el alcance en función de $\Delta v_0 / v_0$

$$\frac{\Delta R}{R} = 2\frac{\Delta v_0}{v_0}$$

Como $\dfrac{\Delta v_0}{v_0} = \pm\, 0{,}02 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\Delta R}{R} = \pm\, 0{,}04$; es decir del ± 4%.

El valor del alcance horizontal es

$$\boxed{R = 22.000 \pm 890 \text{ m}}$$

d) Esta cuestión es de respuesta abierta y tiene como objetivo comprobar la capacidad de razonamiento.

P3 Pimpón electrostático

Un generador de Van de Graff (figura 1) es una máquina electrostática que consigue cargar una esfera hasta muy altos potenciales, del orden de 100 kV. Mediante un generador de este tipo se establece una diferencia de potencial *V* entre dos placas conductoras planas y paralelas (condensador plano), separadas una distancia *d*.

Con este dispositivo y una pelota de pimpón, de radio *R* y masa *M*, pintada con pintura conductora, puede realizarse la experiencia conocida como "pimpón electrostático", cuyo esquema se representa en la figura 2.

Figura 1.- Generador de Van de Graff

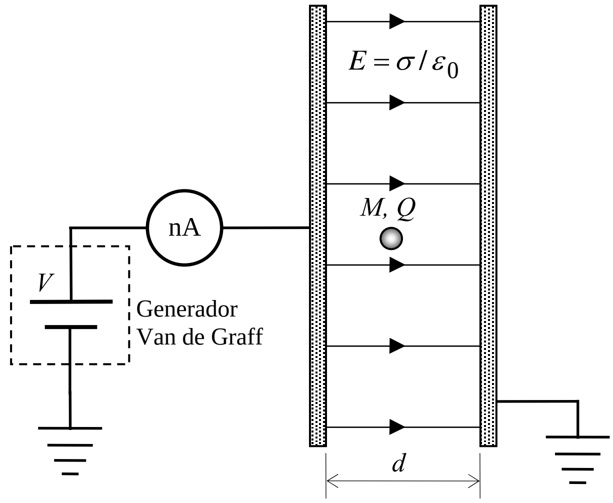


Figura 2.- Esquema del *pimpón electrostático.*

Cuando se pone en marcha el generador, una placa adquiere densidad de carga positiva $+\sigma$ y la otra densidad de carga negativa $-\sigma$. La pelota, inicialmente en contacto con la placa positiva, adquiere una carga $+Q$ y es atraída por la placa negativa. Cuando llega a esta placa, con la que choca inelásticamente, le transfiere su carga positiva y adquiere una carga $-Q$, de forma que es atraída por la placa positiva y se produce el retorno a la posición inicial, donde se repite el choque inelástico y la permuta de carga. Este movimiento de vaivén se repite mientras se mantenga la diferencia de potencial.

El análisis exacto de este proceso es complejo, pero haciendo algunas simplificaciones se pueden obtener resultados realistas. Considera que sobre la pelota sólo actúan fuerzas electrostáticas y que el campo eléctrico $\vec{E}$ entre las dos placas es uniforme, perpendicular a sus superficies y que no se modifica apreciablemente por la presencia de la pelota cargada. También puedes considerar que las dimensiones de la pelota son despreciables frente a la separación entre las placas, es decir que $R \ll d$.

a) Si la pelota de pimpón parte del reposo desde una placa, determina el tiempo *t* que tarda en llegar a la otra. Expresa el resultado en función de *Q, M, d* y *E*.

b) Supón que, tras chocar la pelota con una placa, la carga que adquiere es proporcional a la densidad de carga superficial que tiene esa placa, es decir $Q = k\sigma$. Determina el valor de la carga en función de la constante de proporcionalidad *k* y de los parámetros experimentales *d* y *V*.

c) Cuando las placas del condensador están separadas una distancia d = 0,2 m y se ajusta el voltaje a V = 36 kV, la frecuencia de las oscilaciones de la pelota es de 0,5 Hz. Determina los valores de *k* y *Q*. ¿Qué unidades tiene *k*?

   La masa reglamentaria de una bola de pimpón es m = 2,7 g. La pintura conductora incrementa esta masa en 0,9 g.

   Constante de Coulomb: $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$

d) Calcula la intensidad media que marca el nanoamperímetro (nA) de la figura 2.

e) Relaciona la potencia eléctrica suministrada por el generador de Van de Graff con la energía mecánica entregada por la pelota a una placa en cada choque.

P3. Pimpón electrostático **Solución**

a) La diferencia de potencial aplicada entre las placas del condensador crea un campo eléctrico uniforme en el espacio comprendido entre ellas que viene dado por

$$\vec{E} = E\,\vec{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

donde σ es la densidad de carga existente en cada placa ($+\sigma$ en la de la izquierda y $-\sigma$ en la de la derecha) e $\vec{i}$ el vector unitario en la dirección del eje 0X, horizontal y con origen en la placa izquierda.

La pelota de pimpón puede considerarse aproximadamente para nuestro problema como una partícula con carga Q, luego experimentará un movimiento uniformemente acelerado producido por la fuerza eléctrica

$$\vec{F} = Q\,\vec{E} = M\,\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = a\,\vec{i} = \frac{Q\,E}{M}\vec{i} \qquad (1)$$

Por tanto, recorrerá la distancia d en un tiempo t que cumple

$$d = \frac{1}{2}a\,t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2d}{a}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t = \sqrt{\frac{2\,d\,M}{Q\,E}}} \qquad (2)$$

El camino de vuelta se realiza en el mismo tiempo, ya que también parte del reposo tras un choque inelástico. La única diferencia es que ahora la pelota habrá adquirido una carga $-Q$, y por tanto la fuerza será en sentido opuesto.

b) Teniendo en cuenta la relación entre el campo electrostático uniforme y la diferencia de potencial

$$E = \frac{V}{d} \qquad (3)$$

tenemos que

$$Q = k\sigma \qquad \Rightarrow \qquad Q = k\,\varepsilon_0 E \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Q = k\,\varepsilon_0\,\frac{V}{d}}$$

c) Datos numéricos:
d = 0,2 m
V = 36.000 V.
M= m+0,9 g = 3,6 g.
f = 0,5 Hz. Por tanto el periodo de oscilación (tiempo que le cuesta ir de una placa a otra y volver) es $T = 1/f = 2$ s, y el tiempo que tarda en viajar de una placa hasta la otra es la mitad, t = 1 s.

Sustituyendo el campo eléctrico en función del potencial, expresión (3), en la expresión (2) obtenemos

$$t = \sqrt{\frac{2\,d^2 M}{Q\,V}}$$

despejando Q y sustituyendo los valores numéricos

$$\boxed{Q = \frac{2\,d^2 M}{t^2 V} = 8\cdot 10^{-9}\ \text{C} = 8\ \text{nC}}$$

Podemos calcular k una vez obtenida Q en la forma

$$k = \frac{Q}{\sigma} = \frac{Q}{\varepsilon_0 E} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k = \frac{Q\,d}{\varepsilon_0 V} = 5{,}03\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2}$$

d) Cada segundo el flujo de carga neto es de + 8 nC (bien +8 nC de izquierda a derecha, bien – 8 nC de derecha a izquierda, que es equivalente), por tanto la intensidad media vendrá dada por

$$\langle I \rangle = \frac{Q}{t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I = 8\cdot 10^{-9}\ \text{A} = 8\ \text{nA}}$$

e) La potencia eléctrica media suministrada por el generador viene dada por

$$P = V\langle I\rangle \quad \Rightarrow \quad P = 2{,}88\cdot 10^{-4}\ \text{W} = 0{,}288\,\text{mW}$$

La pelota entrega toda su energía cinética a la placa en cada choque. Para calcular esta energía necesitamos conocer su velocidad final antes del choque v_f,. Como es un movimiento uniformemente acelerado, partiendo del reposo

$$v_f = a\,t = \frac{Q\,E}{M}t = \frac{Q\,V}{M\,d}t = 0{,}4\ \text{m/s}$$

Por tanto su energía cinética es

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_f^2 = 2{,}88\cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

Se observa que, como era de esperar, la potencia eléctrica suministrada por el generador ($2{,}88\cdot 10^{-4}$ W, es decir $2{,}88\cdot 10^{-4}$ Julios cada segundo) coincide con la energía mecánica que entrega la pelota a las placas en cada choque, es decir cada segundo, puesto que este es el tiempo de vuelo de una placa a la otra.