SEGUNDA PRUEBA

26 de febrero de 2010

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de un problema de tipo experimental

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

Subvenciona:

Problema experimental. *Determinación de la viscosidad de un líquido*.

Cuando un cuerpo sólido se mueve en el seno de un fluido (gas o líquido), experimenta una fuerza de fricción, llamada habitualmente *fuerza de arrastre*, que frena su movimiento. Si la velocidad del cuerpo es suficientemente pequeña, se encuentra que la fuerza de arrastre es directamente proporcional a dicha velocidad. La constante de proporcionalidad depende de la forma del cuerpo y de la viscosidad del fluido. En el caso particular de un cuerpo esférico, se demuestra que la fuerza de arrastre F_a es (Ley de Stokes)

$$F_a = 6\pi\eta R v \qquad (1)$$

donde v es la velocidad, R es el radio de la esfera y η es el llamado *coeficiente de viscosidad* del fluido.

En este problema experimental vamos a trabajar con uno de los métodos más comunes de determinar el coeficiente η de un líquido: medida de la velocidad límite de caída de esferas en una columna de ese líquido.

Cuando una esfera cae moviéndose en el seno de un líquido, sobre ella actúan dos fuerzas: su peso aparente, que tiende a acelerar el movimiento hacia abajo, y la fuerza de arrastre (1) que tiende a frenar este movimiento, es decir dirigida hacia arriba. Como la primera es constante y la segunda crece con la velocidad, la aceleración disminuye conforme la esfera cae y gana velocidad. Al cabo de un tiempo y un recorrido suficientemente grandes, las dos fuerzas llegan a igualarse y la aceleración se anula, de forma que la esfera se mueve con velocidad uniforme. Ésta es la llamada *velocidad límite*.

El peso aparente de la esfera es igual al peso real, $m_e g$, menos el empuje de Arquímedes, igual al peso del líquido desalojado, $m_l g$. Poniendo estos pesos en función de las densidades respectivas, ρ_e y ρ_l, y recordando que el volumen de una esfera es $4\pi R^3/3$, la fuerza F_p que tiende a acelerar el movimiento es

$$F_p = \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_e - \rho_l) g$$

Igualando esta fuerza con la de arrastre dada en (1) se deduce la velocidad límite

$$v_{\text{lim}} = \frac{2(\rho_e - \rho_l) g}{9\eta} R^2 \qquad (2)$$

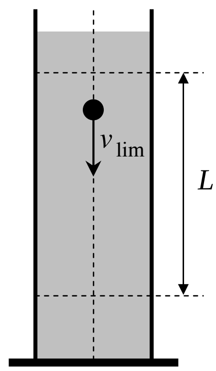


Fig. 1

Esta velocidad es fácil de medir experimentalmente, si no es muy grande, cronometrando el tiempo que tarda la esfera en recorrer una distancia L a lo largo del líquido (figura 1) una vez alcanzada la velocidad límite, es decir sin tener en cuenta la primera parte del recorrido.

Imagina que en el laboratorio dispones de una probeta grande llena de glicerina[1] y siete bolitas de acero, de radios diferentes y conocidos. Con un cronómetro manual mides el tiempo t que tarda cada bolita en recorrer una distancia L = 30,0 cm. Los radios de las esferas y los respectivos tiempos medidos[2] se presentan en la siguiente tabla.

R (mm)	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
t (s)	20,82	13,38	9,20	6,75	5,26	4,17	3,28

a) Construye una tabla con los valores de R^2 y v_{lim} de las diferentes esferas. Dibuja en el papel milimetrado una gráfica con los puntos $(x, y) = (R^2, v_{\text{lim}})$.

b) Determina la pendiente de la recta que mejor se ajusta a estos puntos. Ten en cuenta que, según (2), la recta debe pasar por el origen.

c) Determina el coeficiente de viscosidad, η, de la glicerina.

d) Haz una estimación de la incertidumbre (margen de error) de la pendiente de la recta. Calcula la incertidumbre transmitida al coeficiente de viscosidad.

Datos: $\rho_e = 7{,}86 \cdot 10^3$ kg/m^3; $\rho_l = 1{,}264 \cdot 10^3$ kg/m^3; $g = 9{,}81$ m/s^2.

[1] La viscosidad de la glicerina a temperatura ambiente es bastante alta, de forma que al cabo de unos pocos milímetros de recorrido la velocidad de las bolitas ya es uniforme, es decir se ha alcanzado la velocidad límite.

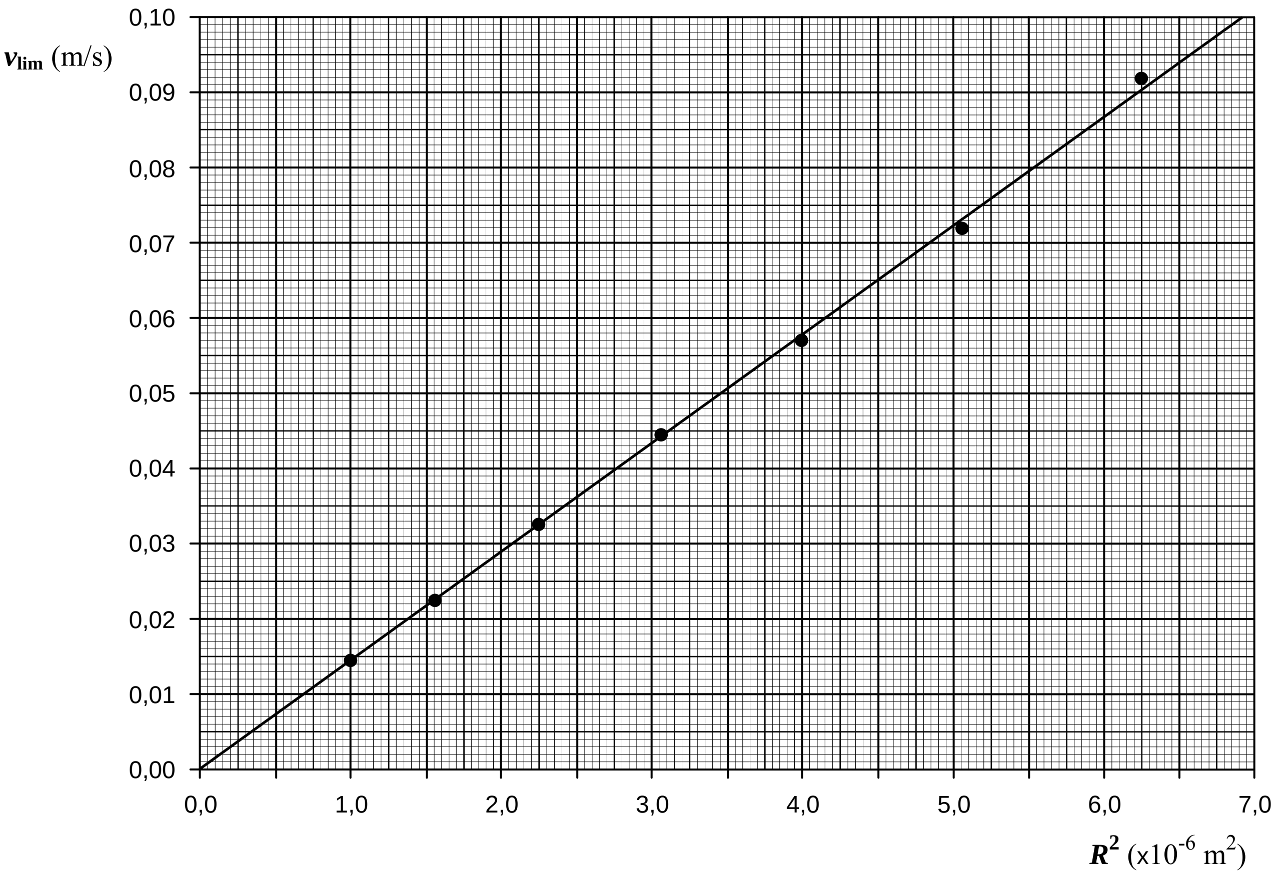
[2] Para mejorar la precisión del resultado sería conveniente medir varias veces cada tiempo de caída y promediarlos, pero sólo se dispone de una bolita de cada radio y no es fácil sacarlas del fondo de la probeta para repetir la medida.

Problema experimental. ***Determinación de la viscosidad de un líquido.*** **Solución**

a) En la siguiente tabla se recogen los valores pedidos de R^2 y $v_{\text{lim}} = L/t$ de las diferentes bolitas.

$\boldsymbol{R^2}\ (\times 10^{-6}\ \text{m}^2)$	1,00	1,56	2,25	3,06	4,00	5,06	6,25
$\boldsymbol{v_{\text{lim}}}\ (\text{m/s})$	0,0144	0,0224	0,0326	0,0444	0,0570	0,0719	0,0915

Los puntos $(x,\ y) = (R^2,\ v_{\text{lim}})$ se representan en la siguiente gráfica, con un aspecto similar al que podría tener dibujada en papel milimetrado



b) En la misma gráfica también se ha dibujado la recta que, pasando por el origen, mejor se ajusta a estos puntos. La pendiente p de esta recta puede calcularse como el cociente de las coordenadas de un punto cualquiera de la recta.

$$p = \frac{y}{x}$$

Para mejorar la precisión relativa de la lectura sobre la gráfica de estas coordenadas, y por tanto de la pendiente, es conveniente tomar un punto alejado del origen. Tomando, por ejemplo, las coordenadas del punto más alejado (extremo superior derecho de la recta dibujada)

$$p = \frac{0{,}100\ \text{m/s}}{6{,}92 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{p = 1{,}445 \cdot 10^4\ \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}}$$

Nota: un ajuste analítico por el método de "mínimos cuadrados" conduce a un resultado muy similar: $p = 1{,}444 \cdot 10^4\ \text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$

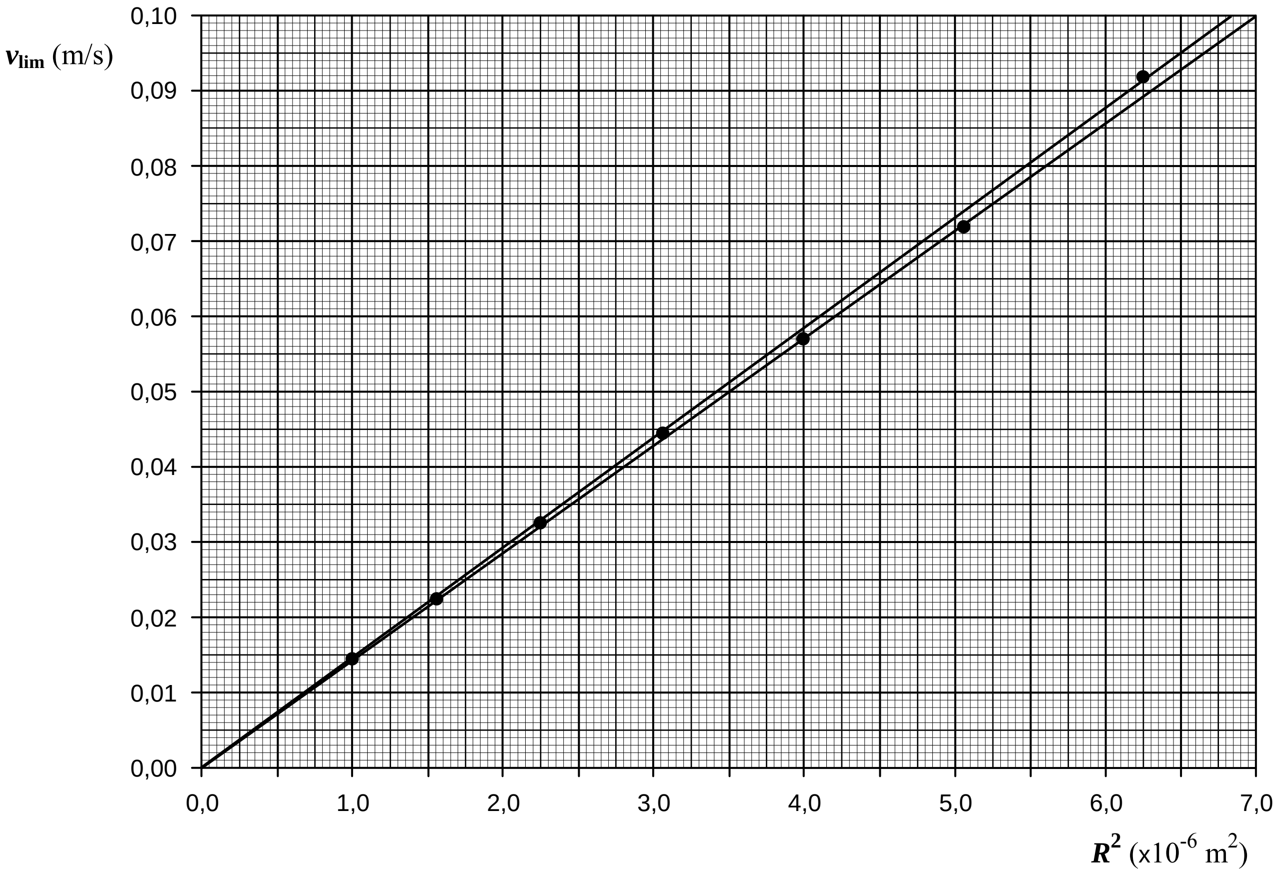
c) En la expresión (2) del enunciado se observa que la pendiente de la recta obtenida es

$$p = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9\eta}$$

Por tanto, la viscosidad de la glicerina que se obtiene es[1]

$$\eta = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9p} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\eta = 0,995\ \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}}$$

d) La incertidumbre de la pendiente puede estimarse trazando sobre la gráfica las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. En la siguiente figura se presenta una estimación de estas rectas.



Las pendientes de estas rectas pueden calcularse como en el apartado b).

$$p_{\max} = \frac{0{,}100\ \mathrm{m/s}}{6{,}84 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 1{,}462 \cdot 10^4\ \mathrm{m^{-1}s^{-1}}$$

$$p_{\min} = \frac{0{,}100\ \mathrm{m/s}}{7{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2} = 1{,}429 \cdot 10^4\ \mathrm{m^{-1}s^{-1}}$$

Por tanto, una estimación de la incertidumbre de la pendiente sería

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\Delta p = 0{,}017 \cdot 10^4\ \mathrm{m^{-1}s^{-1}}}$$

[1] Las unidades de la viscosidad en el S.I., $\mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$, suelen expresarse en la forma equivalente $\mathrm{Pa \cdot s}$.

La incertidumbre transmitida a η puede calcularse numéricamente en la forma

$$\eta_{\max} = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9\,p_{\min}} = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9(p - \Delta p)} = 1{,}007\ \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$$

$$\eta_{\min} = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9\,p_{\max}} = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9(p + \Delta p)} = 0{,}984\ \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$$

$$\Delta\eta = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta\eta = 0{,}012\ \mathrm{kg\ m^{-1}s^{-1}}}$$

En total, el resultado final del experimento sería

$$\boxed{\eta = (0{,}995 \pm 0{,}012)\ \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}}$$

De una forma matemáticamente más elegante, aunque no mas exacta, la incertidumbre transmitida a η también puede calcularse tomando incrementos (en valor absoluto) en la expresión que permite calcular η a partir del valor de *p*.

$$\eta = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g}{9\,p} \quad \rightarrow \quad \Delta\eta = \frac{2(\rho_e - \rho_l)g\ \Delta p}{9\,p^2} = 0{,}012\ \mathrm{kg\,m^{-1}s^{-1}}$$