Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Real Sociedad Española de Física

R.S.E.F.

Universidad Zaragoza 1542

30 Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

1ª PRUEBA

1 de marzo de 2019

Instituto Universitario de Investigación en Nanociencia de Aragón Universidad Zaragoza

Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón Universidad Zaragoza

icma Instituto de Ciencia de Materiales de Aragón

Cátedra Inycom Universidad Zaragoza

Inycom

Cátedra J.M.S. Divulgación Científica

Subvenciona:

cofis Colegio Oficial de Físicos

iberCaja Obra Social

GOBIERNO DE ARAGON Departamento de Educación, Cultura y Deporte

P1.- XXX OAF… y seguimos en órbita

En 2019 celebramos la trigésima edición de la Olimpiada Española de Física, y en particular de la Fase Local de Aragón, la que llamamos Olimpiada Aragonesa de Física. Este es un buen motivo para que los organizadores estemos muy orgullosos, tanto los veteranos que la pusieron en marcha (algunos siguen al pie del cañón) como los que la han mantenido y, por supuesto, todos los estudiantes que han competido (¡más de 3500!). Para conmemorarlo, el primer problema que vais a afrontar es uno de los que se propusieron en la primera OAF.

¡Adelante y suerte!

Una cápsula espacial describe una órbita circular en torno a la Tierra, en su plano ecuatorial, con una velocidad angular, ω_T, igual a la de rotación de la Tierra (órbita geoestacionaria).

a) ¿Cuál es el valor de ω_T?

b) Determina analíticamente y calcula el radio, R, de la órbita geoestacionaria.

c) Determina y calcula la energía mecánica de la cápsula, E, suponiendo que su masa es $M = 2000\,\text{kg}$.

d) Un astronauta que viaja en la cápsula desea lanzar un objeto de masa $m \ll M$, de forma que se mueva radialmente hacia la Tierra, como se muestra en la figura 1. ¿Cuál es la velocidad mínima, v_{min}, con la que debe ser lanzada m respecto a la cápsula? ¿En qué dirección? (Supóngase que, por ser $m \ll M$, no se altera apreciablemente la órbita de la cápsula espacial).

e) Un péndulo oscila con un periodo T = 2 s en la superficie de la Tierra. ¿Cuál sería su periodo de oscilación a bordo de la cápsula espacial?

Datos: Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \times 10^6\ \text{m}$.

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$

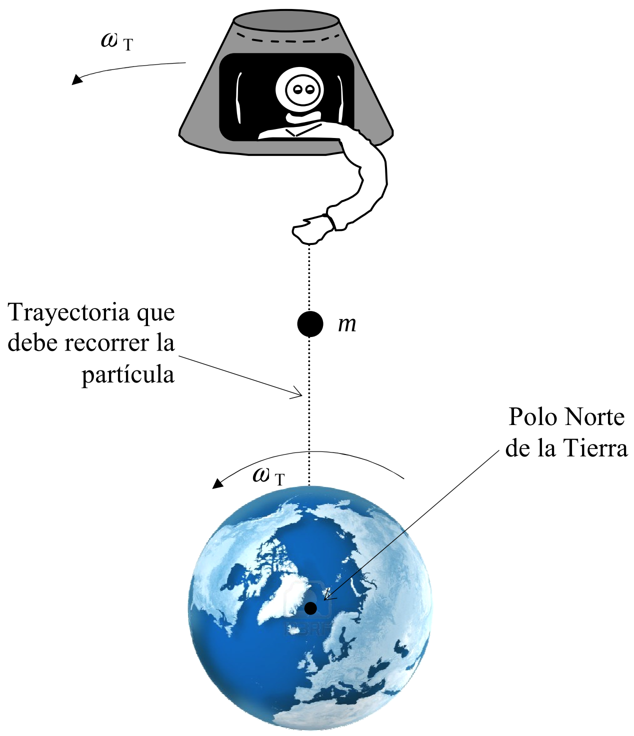


Fig. 1

P1.- Solución

a) El periodo de rotación de la Tierra es de $T = 24\,\text{h} = 8{,}64\times10^4\,\text{s}$, por lo que la velocidad angular de rotación es:

$$\omega_\text{T} = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega_\text{T} = 7{,}27\times10^{-5}\ \text{rad/s}}$$

b) Se dice que un satélite es geoestacionario cuando se mueve en una órbita circular ecuatorial, con una velocidad angular igual a la de rotación de la Tierra (figura 2). En consecuencia, a un "observador" en la superficie Tierra le parecerá que está situado en un punto fijo del cielo.

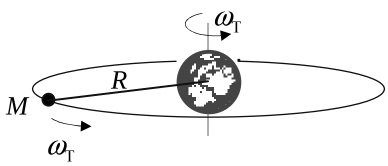


Fig. 2

Como el satélite gira en la órbita circular geoestacionaria, el módulo de su velocidad, $V = \omega_\text{T} R$, es constante y su aceleración es puramente *normal o centrípeta*

$$a_n = \omega_\text{T}^2 R$$

donde R es el radio de la órbita geoestacionaria.

Si M es la masa del satélite, la fuerza que actúa sobre él debe ser

$$\vec{F} = M\,a_n\,\vec{n} = M\,\omega_\text{T}^2 R\,\vec{n} \qquad (1)$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario normal a la trayectoria (figura 3). Por otra parte, esta fuerza es la de atracción gravitatoria de la Tierra

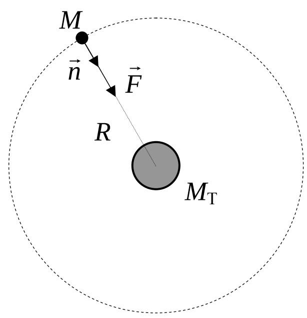


Fig. 3

$$\vec{F} = G\frac{M_\text{T} M}{R^2}\vec{n} \qquad (2)$$

en la que M_T es la masa de la Tierra. De (1) y (2) se deduce que

$$R = \left(\frac{GM_\text{T}}{\omega_\text{T}^2}\right)^{1/3} \qquad (3)$$

Para obtener el valor numérico de R necesitaríamos el de la constante de Gravitación Universal y el de la masa de la Tierra, que no se incluyen en el enunciado. Pero es posible expresar GM_T en función de los datos del problema: radio de la Tierra y aceleración de la gravedad g en su superficie, planteando que el peso de un objeto en la superficie de la Tierra es

$$Mg = G\frac{M\,M_\text{T}}{R_\text{T}^2} \qquad \Rightarrow \qquad GM_\text{T} = g\,R_\text{T}^2 \qquad (4)$$

Sustituyendo en (3)

$$\boxed{R = \left(\frac{gR_\text{T}^2}{\omega_\text{T}^2}\right)^{1/3}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{R = 4{,}22\times10^7\ \text{m}} \qquad (5)$$

c) La energía mecánica es la suma de la cinética y de la potencial gravitatoria[1]

$$E = \frac{1}{2} M V^2 - G \frac{M M_T}{R}$$

Poniendo $V = \omega_T R$ y volviendo a emplear (4)

$$\boxed{E = \frac{1}{2} M \left(\omega_T R\right)^2 - Mg \frac{R_T^2}{R}}$$

$$\boxed{E = -9{,}43 \times 10^9 \text{ J}}$$

d) El astronauta arroja un objeto de masa *m* con una velocidad v'_m respecto a la cápsula, pero la cápsula se mueve con una velocidad $V = \omega_T R$ respecto al centro de la Tierra, en dirección tangente a la órbita. En consecuencia, la velocidad de la masa *m* respecto al centro de la Tierra, $\vec{v}_m$, vendrá dada por

$$\vec{v}_m = \vec{v}'_m + \vec{V}$$

Para lograr que *m* se dirija hacia la Tierra radialmente es necesario que $\vec{v}_m$ lleve esta dirección radial en el instante en que el astronauta la suelte. Después, la masa caerá hacia la Tierra, acelerándose debido a la atracción gravitatoria, pero sin cambiar la dirección de movimiento.

El astronauta cuenta con un número infinito de posibles velocidades de lanzamiento $\vec{v}'_m$ que satisfacen el requerimiento anterior. Algunas de estas velocidades, $\vec{v}'_{m1}$, $\vec{v}'_{m2}$, $\vec{v}'_{m3}$, $\vec{v}'_{m4} = -\vec{V}$, se representan en la figura 4. En esta figura es inmediato apreciar que sus módulos cumplen

$$v'_{m1} > v'_{m2} > v'_{m3} > v'_{m4} = V$$

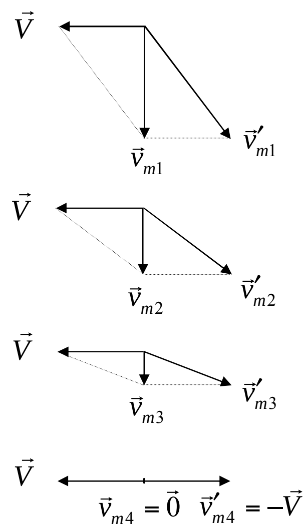


Fig. 4

En particular, la velocidad de lanzamiento respecto a la cápsula de módulo mínimo es $\vec{v}'_{m4} = -\vec{V}$, a la que corresponde una velocidad absoluta nula, $v_{m4} = 0$. Es decir, si el astronauta lanza la partícula con una velocidad igual a la de la cápsula pero en sentido opuesto (para lo cual va a necesitar ser un "Superman"), conseguirá dejarla sin velocidad respecto al centro de la Tierra. A partir de entonces *m* comenzará a caer hacia la Tierra, siguiendo la trayectoria radial prevista.

En definitiva, la velocidad mínima de lanzamiento requerida es

$$\boxed{v_{\min} = V = \omega_T R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\min} = 3{,}07 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

en dirección tangente a la órbita y en sentido opuesto al de movimiento de la cápsula.

e) La cápsula, con cualquier objeto que haya en su interior, se está moviendo en "caída libre", en presencia del campo gravitatorio terrestre. Por tanto, el péndulo dentro de la cápsula se encuentra en un estado de ingravidez aparente y el hilo no se tensará, es decir el péndulo no oscilará.

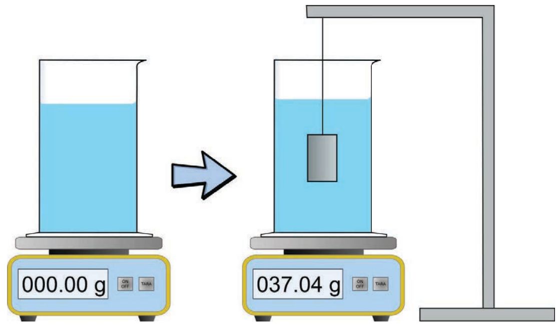
Dicho de otra forma, el periodo de un péndulo viene dado por $T = 2\pi\sqrt{l/g'}$. En este caso $g' = 0$, y en consecuencia $T = \infty$, lo que significa que el péndulo estará en reposo respecto a la cápsula, sin oscilar.

[1] Sería un grave error escribir la energía potencial gravitatoria como *mgh*, porque esta expresión sólo es aproximadamente válida en las proximidades de la superficie de la Tierra, para pequeñas variaciones de altura en un campo gravitatorio aproximadamente uniforme. Pero, como acabamos de ver, el radio de la órbita geoestacionaria es mucho mayor que el radio de la Tierra.

P2.- … y Arquímedes dijo ¡eureka!

Cuenta la leyenda que Arquímedes descubrió el famoso principio que lleva su nombre cuando estaba bañándose. Tal fue su alegría que salió corriendo por las calles de Siracusa gritando ¡eureka!, sin acordarse siquiera de ponerse la ropa. El principio de Arquímedes viene a decir que no puede haber un cuerpo en el mismo lugar que otro, y su enunciado formal es “Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo experimenta un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del volumen que desaloja”.

Una de las utilidades del principio de Arquímedes es la determinación de densidades de sólidos y fluidos. Un método consiste en sumergir un cuerpo sólido en un líquido y medir el empuje. A partir de esta medida se puede deducir la densidad del líquido o del sólido si se conocen el resto de parámetros.



Para determinar la densidad de un sólido, preparamos en el laboratorio un vaso lleno de agua que ponemos encima de una balanza de precisión. La balanza se tara (se pone a cero la lectura en su pantalla) y a continuación se introduce en el agua un cuerpo de masa m conocida, que se mantiene suspendido de un fino hilo, de forma que quede totalmente sumergido pero sin apoyar en el fondo del recipiente. En estas circunstancias, la lectura de la balanza es M.

a) Determina M en función del empuje hidrostático E sobre el cuerpo sumergido.

b) Determina la densidad del cuerpo, ρ, en función de m, M y la densidad del agua, ρ_0.

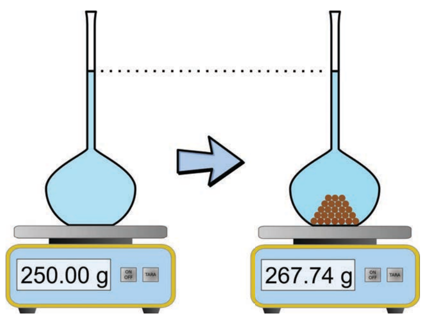
c) Para $\rho_0 = 1{,}00$ g/cm^3, $m = 100{,}00$ g y $M = 37{,}04$ g, calcula el valor de la densidad del cuerpo, ρ.

Para medir la densidad de un líquido se utiliza un “buzo” calibrado, que consiste en un cilindro de vidrio de un determinado volumen conocido, V_0. El procedimiento es similar al descrito anteriormente: se pone en la balanza un vaso lleno del fluido cuya densidad ρ_F queremos determinar, y se tara la balanza. Se sumerge el buzo y se toma la lectura de la balanza, M°.

d) Determina la expresión de ρ_F en función de V_0 y M°.

Si el líquido es glicerina y se sumerge un buzo de $V_0 = 10{,}0$ cm^3, la lectura de la balanza es $M^\circ = 12{,}60$ g.

e) Calcula la densidad de la glicerina.



Para medir la densidad de materiales granulados, como la arena, se utiliza otro método que no se basa en el principio de Arquímedes. Se llena de agua un recipiente de cuello estrecho (picnómetro) hasta una determinada marca. Se pone el picnómetro en la balanza y se anota la lectura m_p. Se introduce una masa conocida de arena, m_a en el picnómetro, se retira el exceso de agua hasta la marca, se pone el picnómetro en la balanza y se anota la nueva lectura m_p°.

f) Deduce la expresión de la densidad de la arena, ρ_a, en función de la densidad del agua, ρ_0, y de m_p, m_a y m_p°.

Se dispone de un picnómetro lleno de agua que “pesa” 250,00 g y se realiza el procedimiento con 50,00 g de arena, obteniendo una pesada final $m_p^\circ = 267{,}74$ g.

g) Calcula la densidad ρ_a de la muestra de arena.

P2.- Solución

a) Cuando el cuerpo está sumergido, el agua del vaso ejerce sobre él un empuje E hacia arriba. Por el principio de acción y reacción (3ª Ley de Newton) el cuerpo sumergido ejercerá sobre el agua una fuerza E hacia abajo. Como se había tarado la balanza (lectura nula) antes de sumergir el cuerpo, el cambio en la lectura de la balanza será el correspondiente a este empuje E. Pero, como la balanza mide masas, la lectura M será

$$M = \frac{E}{g}$$

b) Aplicando el principio de Arquímedes, el empuje sobre un cuerpo de volumen V sumergido en agua es

$$E = \rho_0 V g$$

Por otra parte

$$E = Mg$$

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Por tanto

$$Mg = \rho_0 \frac{m}{\rho} g \quad ® \quad \boxed{\rho = \rho_0 \frac{m}{M}}$$

c) Sustituyendo los datos en la ecuación anterior

$$\boxed{\rho = 2{,}70 \text{ g/cm}^3}$$

d) En este caso el empuje será

$$E = \rho_{\mathrm{F}} V_0 g = M'g$$

de modo que

$$\boxed{\rho_{\mathrm{F}} = \frac{M'}{V_0}}$$

e) Sustituyendo los datos se obtiene

$$\boxed{\rho_{\mathrm{F}} = 1{,}26 \text{ g/cm}^3}$$

f) La lectura m_{p} corresponde a la masa del picnómetro con el agua en su interior. Al introducir una masa $m_{\mathrm{a}} = \rho_{\mathrm{a}} V_{\mathrm{a}}$ de arena, se debe retirar el mismo volumen V_{a} de agua para volver a enrasar el agua en la marca del picnómetro. Por tanto, la nueva lectura de la balanza será

$$m'_{\mathrm{p}} = m_p + m_a - \rho_0 V_a = m_p + m_a - \rho_0 \frac{m_a}{\rho_a} \qquad ® \qquad \boxed{\rho_{\mathrm{a}} = \rho_0 \frac{m_{\mathrm{a}}}{m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{a}} - m'_{\mathrm{p}}}}$$

g) Sustituyendo en la ecuación anterior, se obtiene

$$\boxed{\rho_{\mathrm{a}} = 1{,}55 \text{ g/cm}^3}$$

P3.- Movimiento de iones entre dos cilindros coaxiales cargados.

Dos electrodos cilíndricos coaxiales de gran longitud L tienen radios a y b y cargas eléctricas $-Q$ y $+Q$, respectivamente. En la figura 1 se representa una sección perpendicular al eje de los cilindros. Se ha simbolizado con un "cañón" un dispositivo interior, de pequeñas dimensiones, generador y acelerador de iones positivos. Los iones son disparados a una distancia r_0 del eje y en dirección tangencial. Un esquema más realista del "cañón" se muestra en la figura 2.

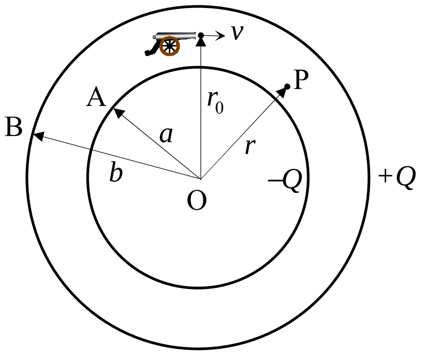


Fig. 1

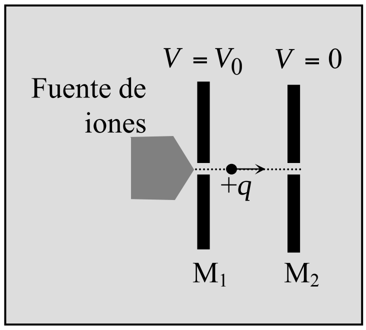


Fig 2

Puede demostrarse que, si $L >> a$, b, el potencial eléctrico en un punto P entre los electrodos cilíndricos, a una distancia r del eje, es:

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

a) Si la diferencia de potencial entre los electrodos es V_{BA}, determina el potencial eléctrico en P, $V(r)$, en función de V_{BA} y de r.

Como los cilindros coaxiales cargados tienen simetría cilíndrica, las líneas de fuerza del campo eléctrico son radiales, es decir perpendiculares al eje de simetría que pasa por O. Si dr es un elemento infinitesimal de longitud a lo largo de una línea de fuerza, la variación elemental correspondiente del potencial eléctrico viene dada por:

$$dV = -E\,dr$$

b) Determina el campo eléctrico, E, a una distancia r del eje, y la fuerza, F, a la que está sometido un ion de carga q que pasa por ese punto.

En la figura 2 se representa el "cañón", que consta de una fuente de iones, de carga positiva q y masa m, y dos placas metálicas paralelas M_1 y M_2 entre las que son acelerados los iones, que pasan por ellas a través de unos pequeños orificios. La diferencia de potencial eléctrico entre las placas es V_0. Puede despreciarse la velocidad inicial de los iones, cuando pasan por el orificio de la placa M_1.

El cañón de iones está dentro de una caja metálica (no representada) que aísla su interior del campo eléctrico exterior creado por los electrodos cilíndricos.

c) Determina la velocidad de los iones, v, cuando salen disparados del cañón.

d) Determina la diferencia de potencial que debe existir entre los cilindros concéntricos, V_{BA}, para que la trayectoria de los iones disparados sea circular de radio r_0.

e) ¿Qué diferencia de potencial V'_{BA} habría que aplicar para que iones de la misma carga q y masa diferente $m' \neq m$ siguieran la misma trayectoria circular de radio r_0?

P3.- Solución

a) El potencial eléctrico en un punto P entre los electrodos, a una distancia r del eje, es

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\ln\left(\frac{r}{a}\right) \qquad (1)$$

La diferencia de potencial V_{BA} es

$$V_{\mathrm{BA}} = V(r=b) - V(r=a) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{L}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (2)$$

Entre (1) y (2) se obtiene

$$\boxed{V = \frac{V_{\mathrm{BA}}}{\ln(b/a)}\ln\left(\frac{r}{a}\right)} \qquad (3)$$

b) La variación elemental de potencial eléctrico que da el enunciado es

$$dV = -E\,dr$$

Luego de (3) resulta

$$E = -\frac{dV}{dr} = -\frac{V_{\mathrm{BA}}}{\ln(b/a)}\frac{1}{r}$$

Como la fuerza sobre el ion de carga q es qE, resulta

$$\boxed{F = -\frac{V_{\mathrm{BA}}}{\ln(b/a)}\frac{q}{r}} \qquad (4)$$

Esta fuerza F tiene dirección radial. El signo menos indica que, para iones positivos, está dirigida hacia el eje de simetría de los cilindros.

c) En el enunciado se indica que los iones atraviesan la placa M_1 con velocidad aproximadamente nula. En el espacio entre las placas son acelerados por el campo eléctrico que existe entre ellas. La energía del ion en la placa M_1 es qV_0 y alcanza la placa M_2, que está a potencial cero, con una velocidad v, es decir con una energía cinética $mv^2/2$. Aplicando la conservación de la energía

$$qV_0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}} \qquad (5)$$

d) La fuerza sobre el ion positivo va dirigida hacia O. Aplicando la segunda ley de Newton a los iones, que describen una trayectoria circular de radio r_0, el módulo de esta fuerza será

$$F = m\frac{v^2}{r_0}$$

Teniendo en cuenta (4) y (5) se tiene que

$$\frac{V_{\mathrm{BA}}}{\ln(b/a)}\frac{q}{r_0} = m\frac{\frac{2qV_0}{m}}{r_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{\mathrm{BA}} = 2V_0\ln(b/a)}$$

e) La expresión anterior no depende de m (ni de q), luego la diferencia de potencial sería la misma.

$$\boxed{V'_{\mathrm{BA}} = V_{\mathrm{BA}} = 2V_0\ln(b/a)}$$