Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Real Sociedad Española de Física

R.S.E.F.

Universidad Zaragoza 1542

1ª PRUEBA

19 de marzo de 2021

FZC Fundación Zaragoza Conocimiento

INMA INSTITUTO DE NANOCIENCIA Y MATERIALES DE ARAGÓN

Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón Universidad Zaragoza

LSC Laboratorio Subterráneo de Canfranc

Instituto Universitario de Investigación de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos Universidad Zaragoza

Cátedra Inycom Universidad Zaragoza

Inycom

cofis Colegio Oficial de Físicos

Fundación ibercaja

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

P1. Dos puestas de sol consecutivas

Una enamorada pareja se encuentra al pie de un lujoso hotel, en la orilla de una idílica playa situada en el círculo ecuatorial terrestre, cuando, al atardecer, observan una bella estampa de la puesta de sol sobre un mar en calma (Fig. 1).

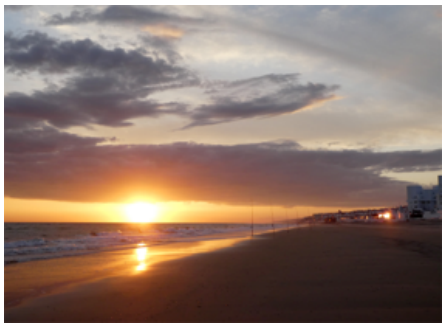


Fig. 1

Una de las atracciones que presenta este lujoso hotel es la posibilidad de poder observar una segunda puesta de sol. Para facilitar este capricho astronómico el hotel sitúa la puerta de acceso de un ascensor justo al pie de la playa. Para dar cumplida satisfacción a este evento, la feliz pareja, inmediatamente después de observar la primera puesta de Sol, toma el ascensor y se dirigen a la terraza del hotel, situada a una altura $H = 20$ m, donde esperan poder ver por segunda vez tan excitante escena. Por simplicidad, vamos a considerar que el ascensor sube con una velocidad constante $v = 0{,}8$ m/s.

Debido a la rotación terrestre, con velocidad angular ω, la Tierra gira un pequeño ángulo θ que provoca, tras la primera puesta de sol, la aparición de una sombra de altura h sobre la fachada del hotel, tal como muestra la figura 2. Para simplificar la situación descrita, supongamos que los rayos del Sol inciden en paralelo al plano del círculo ecuatorial terrestre.

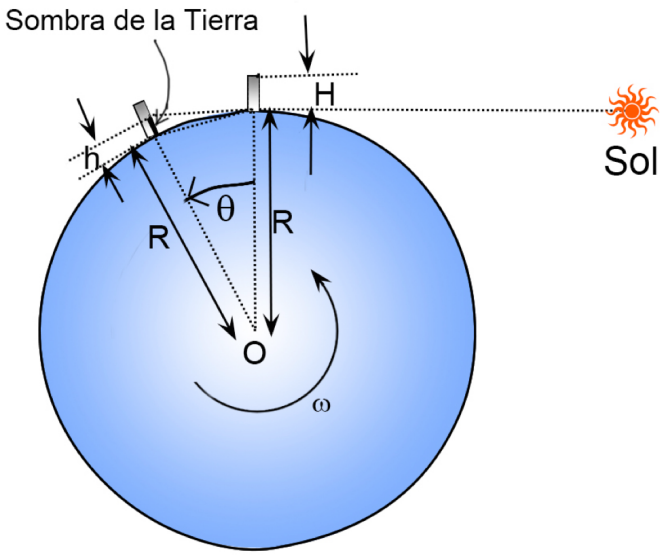


Fig. 2

a) Calcula el tiempo que tarda el ascensor en llegar a la terraza del edificio.

b) Obtén la expresión de la altura h de la sombra proyectada por la Tierra sobre la fachada del hotel en función de R, ω y t.

c) Determina si la pareja llegará a tiempo a la terraza para ver una segunda puesta de sol.

El equipo técnico del hotel decide mejorar la atracción incorporando un sistema de control del ascensor que permita su ascenso simultáneamente a la sombra proyectada sobre el mismo, de forma que los enamorados viajeros a bordo del ascensor puedan disfrutar de una prolongada puesta de sol que dure hasta que el ascensor llegue a la terraza.

d) A partir de la expresión obtenida en b), calcula, en función de R, ω y t, la velocidad a la que debería ascender el ascensor para seguir la sombra del sol sobre la fachada del hotel.

Dado que el ángulo de giro θ de la Tierra durante la subida del ascensor es pequeño, las funciones $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$ se pueden aproximar del siguiente modo:

$$\text{sen}\,\theta \approx \theta; \quad \cos\theta \approx 1\,.$$

e) Aplica la aproximación propuesta para simplificar la expresión de la velocidad obtenida en el apartado d).

f) A partir del resultado anterior deduce con qué aceleración debe ascender el ascensor para seguir la sombra. ¿Qué tipo de movimiento debe describir el ascensor?

g) ¿Según los resultados de los apartados e) y f), ¿cuánto tiempo disfrutará la enamorada pareja de la puesta de sol desde que el ascensor empieza a ascender hasta que llegan a la terraza del hotel?

Datos: - Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37 \times 10^6\,\text{m}$.

P1. Solución

a) El ascensor sube con velocidad constante, de modo que tardará un tiempo t_1 en llegar a la terraza,

$$v = \frac{H}{t_1} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{H}{v} = \frac{20}{0{,}8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = 25 \text{ s}}$$

b) Según la figura 2, del triángulo rectángulo de ángulo θ que tiene por catetos R y el rayo del Sol tangente a la superficie de la Tierra, se deduce

$$\cos\theta = \frac{R}{R+h} \quad \Rightarrow \quad h = R\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)$$

Sustituyendo $\theta = \omega t$,

$$\boxed{h = R\left(\frac{1}{\cos\omega t} - 1\right)} \qquad (1)$$

c) Durante el tiempo t_1 que el ascensor tarda en llegar a la terraza del hotel, la sombra del sol alcanzará una altura

$$h = 6{,}371\cdot 10^6 \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600} 25\right)} - 1 \right) \quad \Rightarrow \quad h = 10{,}52 \text{ m}$$

Esta altura es inferior a la altura de la terraza del hotel, de modo que la pareja sí llegará a tiempo para observar la segunda puesta de Sol.

d) Para seguir la puesta de sol, el ascensor deberá ascender con la misma velocidad que asciende la sombra, que podemos obtener a partir de la ecuación (1),

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{R\omega \,\mathrm{sen}(\omega t)}{\cos^2(\omega t)}}$$

e) Con la aproximación propuesta podemos obtener una expresión de la velocidad más simple,

$$\boxed{v(t) = R\omega^2 t} \qquad (2)$$

f) A partir de la expresión (2) podemos obtener la aceleración como

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a(t) = R\omega^2}$$

La expresión obtenida indica que la aceleración es constante, por lo que el ascensor debe ascender con un movimiento uniformemente acelerado.

g) Como el ascensor sube con movimiento uniformemente acelerado, el tiempo t_2 que tarda en subir hasta la terraza del edifico, a una altura H, estará determinado por

$$H = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}R\omega^2 t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2H}{R\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20}{6{,}371\cdot 10^6 \left(\frac{2\pi}{24\cdot 3600}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_2 = 34{,}45 \text{ s}}$$

Así que los enamorados disfrutarán de algo más de medio minuto para proceder a su declaración de amor, tiempo que, en términos físicos, no se puede determinar si es o no suficiente. Para que este tiempo fuera más prolongado sería necesario añadir plantas al edifico o frenar la rotación del Sol, algo que solo está al alcance de parejas verdaderamente enamoradas.

P2. La cazadora de agujeros negros

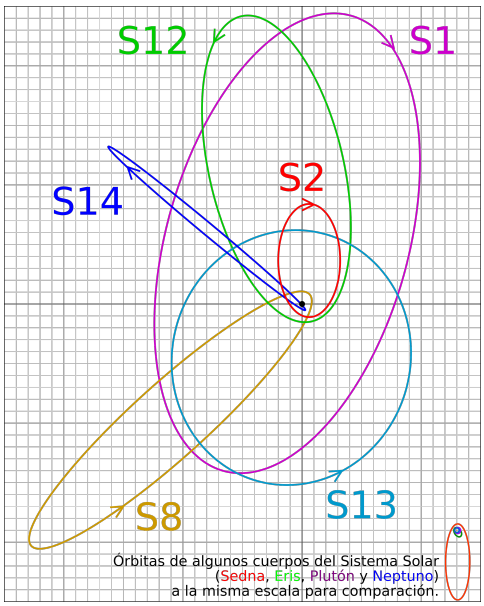
Los agujeros negros son objetos astrofísicos que concentran una masa tan grande que ni siquiera la luz puede escapar del campo gravitatorio que generan. Esta propiedad hace que sean invisibles y por lo tanto muy difíciles de detectar, salvo por sus efectos gravitatorios, ya que gobiernan la dinámica de las estrellas que orbitan en su entorno. Los agujeros negros parecen emitir diferentes formas de radiación, realmente originada por la materia que "cae" en ellos.

Sagittarius A* es un objeto compacto y brillante en ondas de radio en el centro de la Vía Láctea, a 26 mil años-luz del sistema solar. Sagittarius A fue descubierto en 1931 por Karl Jansky, y consiste en diferentes fuentes de ondas de radio superpuestas, que en 1974 fueron resueltas, siendo Sagittarius A* la denominación que recibió la más intensa y compacta de todas ellas.

Sagittarius A* se encuentra en el foco de las órbitas de varias estrellas, cuyos movimientos orbitales fueron analizados durante más de 16 años por Andrea Ghez y Reinhard Genzel. En la figura 1 se muestran las órbitas aparentes[1] de seis de estas estrellas.

Las observaciones de Ghez y Genzel han revelado la existencia de un objeto invisible y extremadamente pesado, compatible con un agujero negro supermasivo, que atrae a dichas estrellas de forma que orbitan a su alrededor a increíbles velocidades. Andrea Ghez obtuvo, junto a Reinhard Genzel, el premio Nobel en Física en 2020 por su investigación pionera que ha permitido descubrir este agujero negro supermasivo, que se encuentra en el centro de la Vía Láctea, siendo la cuarta mujer en recibir este premio desde su instauración[2].

Vamos a suponer de forma simplificada que se puede aplicar la dinámica newtoniana a las órbitas de las estrellas que rodean Sagittarius A*, de modo que no es necesario introducir correcciones de Relatividad General.



https://en.wikipedia.org/wiki/Sagittarius_A*

Fig. 1

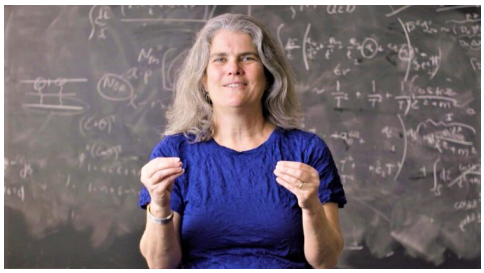


Fig. 2: Andrea Ghez

a) Expresa la tercera ley de Kepler en función de la masa M del objeto central. Para ello puedes suponer órbitas circulares.

Vamos a centrar nuestra atención en las estrellas S1 y S2, cuyos datos se indican al final. Sus órbitas son elipses muy excéntricas[3], cuyo semieje mayor equivale al radio orbital promedio.

b) A partir de los datos de las órbitas de S1 y S2, comprueba que cumplen la tercera ley de Kepler.

---

(1) La órbita aparente es la trayectoria de la estrella que se observa desde la Tierra, es decir, la proyección de la orbita sobre el plano perpendicular a nuestra línea de visión.

(2) Andrea Ghez comparte la mitad del premio Nobel con Reinhard Genzel. La otra mitad del premio Nobel le corresponde a Roger Penrose por el hallazgo de que la formación de agujeros negros es una consecuencia directa de la teoría general de la relatividad de Albert Einstein.

(3) La excentricidad de una órbita se relaciona con las distancias al afelio, r_A, y al perihelio, r_P, en la forma

$$e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}$$

c) Calcula la masa M_* del objeto central, responsable del movimiento de las estrellas S1 y S2.

Las dimensiones del objeto "central" no son conocidas, pero se han acotado a una esfera de radio $R_* = 2{,}2 \cdot 10^7$ km.

d) Calcula la aceleración de la gravedad que observaríamos en un punto en el borde de dicha distribución de masa, supuesta esférica, en unidades de *g*, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre.

e) ¿Cuál sería la velocidad de escape correspondiente a dicho objeto en unidades de la velocidad de la luz en vacío, *c*?

Cuando un objeto no puntual está sometido a la acción gravitatoria de otro aparecen sobre él lo que se denominan *fuerzas de marea*, debidas a la diferencia de las fuerzas gravitatorias que experimentaría una masa *m* en diferentes posiciones de la superficie del objeto no puntual[4]. Se definen como la diferencia entre la fuerza que actúa sobre la masa *m* en un punto de la superficie del objeto no puntual menos la fuerza que actuaría sobre dicha masa si estuviera situada en el punto central del objeto.

La situación simplificada se ilustra en la figura 3. Consideraremos los puntos A y B, en la superficie del objeto de radio *R* sobre el que actúa la acción gravitatoria de la masa *M* (que podemos considerar puntual); C es el centro del objeto, a distancia *r* de la masa *M*; A el punto de la superficie más próximo a la masa *M* y B el más alejado. Todos los puntos están alineados.

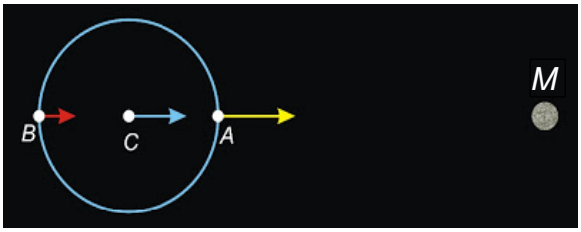


Fig. 3

f) Calcula[5] la fuerza de marea para una masa *m* colocada en los puntos A y B, en función de *r*, *R* y *M*, indicando su módulo, dirección y sentido.

g) Determina la relación entre la fuerza de marea que actúa sobre el punto A de la Tierra debido a la acción combinada del Sol y la Luna cuando los tres se encuentran perfectamente alineados y la fuerza de marea que experimentaría dicho punto A en la Tierra si ésta se encontrara colocada en el perihelio de la órbita de la estrella S2 alrededor de Sagittarius A*.

Datos:

- Excentricidad de la órbita de S1, $e_1 = 0{,}5560$
- Periodo orbital de S1, $T_1 = 166$ años
- Distancia al perihelio de S1, $r_{P1} = 2160{,}7$ UA
- Unidad astronómica, $1\ \text{UA} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
- Masa del Sol, $M_\odot = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
- Distancia Sol-Tierra, $r_S = 1$ UA
- Constante gravitatoria $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N m}^2\text{kg}^{-2}$
- Excentricidad de la órbita de S2, $e_2 = 0{,}8843$
- Periodo orbital de S2, $T_2 = 16{,}1$ años
- Distancia al perihelio de S2, $r_{P2} = 118{,}4$ UA
- Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8$ m/s
- Masa de la Luna, $M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg
- Distancia Luna-Tierra, $r_L = 3{,}844 \cdot 10^5$ km
- Radio de la Tierra $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m

---

(4) Las fuerzas de marea provocan las mareas en la Tierra, son responsables de que siempre veamos la misma cara de la Luna y frenan de forma continua la rotación de la Tierra. Si las fuerzas de marea sobre un objeto sólido son muy grandes, podrían producir su ruptura.

(5) Dado que en general se cumplirá que $r >> R$, puedes utilizar las aproximaciones:

$$\frac{1}{(1-R/r)^2} \approx 1+2\frac{R}{r} \quad ; \quad \frac{1}{(1+R/r)^2} \approx 1-2\frac{R}{r}$$

P2. Solución

a) Suponiendo órbitas circulares de radio r podemos igualar la fuerza centrípeta con la fuerza gravitatoria,

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

El periodo de la órbita T lo podemos relacionar con la velocidad orbital y la longitud de la circunferencia,

$$T=\frac{2\pi r}{v}$$

De donde, si despejamos v y sustituimos en la expresión de la fuerza centrípeta, obtenemos,

$$G\frac{M}{r^2}=\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{GM}}$$

Para órbitas elípticas, esta relación se convierte en

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM} \qquad (1)$$

Siendo a el semieje mayor de la órbita (que coincide con el radio orbital medio).

b) Para comprobar la ley de Kepler utilizando los datos de las órbitas S1 y S2 calculamos el cuadrado del periodo orbital dividido por el cubo del semieje mayor de la órbita. Este cociente debe ser constante. A partir de los datos de la excentricidad orbital, e, y distancia al perihelio, r_P, calculamos la distancia al afelio, r_A,

$$r_A=r_P\frac{1+e}{1-e}$$

Sustituyendo los datos de la tabla para la excentricidad de S1 y S2 obtenemos

$$r_{A1}=3{,}5\,r_{P1} \quad ; \quad r_{A2}=16{,}3\,r_{P2}$$

De modo que el semieje mayor de sus órbitas será

$$a_1=\frac{1}{2}\left(r_{A1}+r_{P1}\right)=2{,}25\,r_{P1}=4861{,}58\ \text{UA}$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left(r_{A2}+r_{P2}\right)=8{,}65\,r_{P2}=1024{,}16\ \text{UA}$$

Se comprueba que

$$\frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{T_2^2}{a_2^3}\cong 2{,}4\cdot 10^{-7}\ \text{años}^2/\text{UA}^3 \qquad (2)$$

Por lo que podemos concluir que se cumple la Ley de Kepler para las órbitas de S1 y S2.

c) Para calcular la masa M_* del objeto central, la despejamos de la expresión (1) de la ley de Kepler que hemos obtenidos en el apartado a) y sustituimos por el valor obtenido en (2)

$$M_*=\frac{4\pi^2}{G}\left(\frac{T^2}{a^3}\right)^{-1}=\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}\left(2{,}4\cdot 10^{-7}\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M_*=8{,}35\cdot 10^{36}\ kg=4{,}18\cdot 10^{6}\ M_\odot}$$

d) La aceleración de la gravedad debida a un objeto de la masa M_* calculada en el apartado c), a distancia R_* es

$$g' = \frac{GM_*}{R_*^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 8{,}35\cdot 10^{36}}{(2{,}2\cdot 10^{10})^2} = 1{,}15\cdot 10^{6}\ \mathrm{m/s^2}$$

Que expresada en unidades de la aceleración de la gravedad en al superficie terreste, *g*, es

$$\boxed{g' = 1{,}17\cdot 10^{5}\ g}$$

e) La velocidad de escape será,

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_*}{R_*}} = \sqrt{2\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 8{,}35\cdot 10^{36}}{2{,}2\cdot 10^{10}}} = 2{,}25\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}$$

Que expresada en unidades de la velocidad de la luz en el vacío, *c*, es

$$\boxed{v_{esc} = 0{,}75\,c}$$

f) La fuerza de marea en A se calcula como la diferencia entre la fuerza que experimenta un objeto de masa *m* en la posición A y la que experimentaría si se encontrara en el punto central C, a distancia *r* de la masa *M*. Así,

$$\vec{F}_{marea,A} = \left[-\frac{GMm}{(r-R)^2} + \frac{GMm}{r^2}\right]\hat{r}$$

Análogamente, para el punto B,

$$\vec{F}_{marea,B} = \left[-\frac{GMm}{(r+R)^2} + \frac{GMm}{r^2}\right]\hat{r}$$

Como $r >> R$, podemos aproximar las expresiones anteriores utilizando la aproximación descrita en la nota al pie (5), de modo que

$$\vec{F}_{marea,A} = \left[-\frac{GMm}{r^2(1-R/r)^2} + \frac{GMm}{r^2}\right]\hat{r} \approx \left[-\frac{GMm}{r^2}(1+2\frac{R}{r}) + \frac{GMm}{r^2}\right]\hat{r} = -\frac{2GMmR}{r^3}\hat{r}$$

Operando análogamente, para el punto B,

$$\vec{F}_{marea,B} = \frac{2GMmR}{r^3}\hat{r}$$

g) Si consideramos el efecto simultáneo del Sol y la Luna sobre el punto A en la superficie de la Tierra, la fuerza de marea resultante será la suma de las fuerzas de marea debidas al Sol y la Luna,

$$\left(\vec{F}_{marea,A}\right)_{Sol,Luna} = \left(-\frac{2GM_\odot mR_T}{r_S^3} - \frac{2GM_L mR_T}{r_L^3}\right)\hat{r} = -2GmR_T\left(\frac{M_\odot}{r_S^3} + \frac{M_L}{r_L^3}\right)\hat{r}$$

Si la Tierra se encontrara en el lugar de la estrella S2, la fuerza de marea del agujero negro sobre el mismo punto A en el perihelio de la órbita sería

$$\left(\vec{F}_{marea,A}\right)_{Sagittarius\,A^*} = \left(-\frac{2GM_* mR_T}{r_{P2}^3}\right)\hat{r}$$

De modo que la relación entre ambas viene dada por

$$\frac{\left(F_{marea,A}\right)_{Sol,Luna}}{\left(F_{marea,A}\right)_{Sagittarius\ A^*}} = \frac{\dfrac{M_\odot}{r_S^3} + \dfrac{M_L}{r_L^3}}{\dfrac{M_*}{r_{P2}^3}}$$

Expresando la masa de la luna en unidades de masas solares y la distancia Tierra-Luna en UA,

$$M_L = 3{,}67 \cdot 10^{-8}\, M_\odot\ , \qquad r_L = 2{,}56 \cdot 10^{-3}\ \text{UA}\ ,$$

obtenemos

$$\boxed{\frac{\left(F_{marea,A}\right)_{Sol,Luna}}{\left(F_{marea,A}\right)_{Sagittarius\ A^*}} \approx \frac{1+2{,}18}{2{,}52} = 1{,}26}$$

Se deduce de esta relación que, si la Tierra estuviera en el perihelio de S2, las fuerzas de marea que experimentaría serían mayores que las que produce el Sol y del orden de las que produce la Luna, lo que no es muy preocupante si olvidamos el resto de peligros a los que la Tierra estaría sometida si estuviera tan cerca de un agujero negro.

P3. Espectrómetro de masas de sector magnético[1]

En la figura 1 se muestra el esquema de un espectrómetro de masas (de Dempster) cuyo funcionamiento es, en esencia, el siguiente:

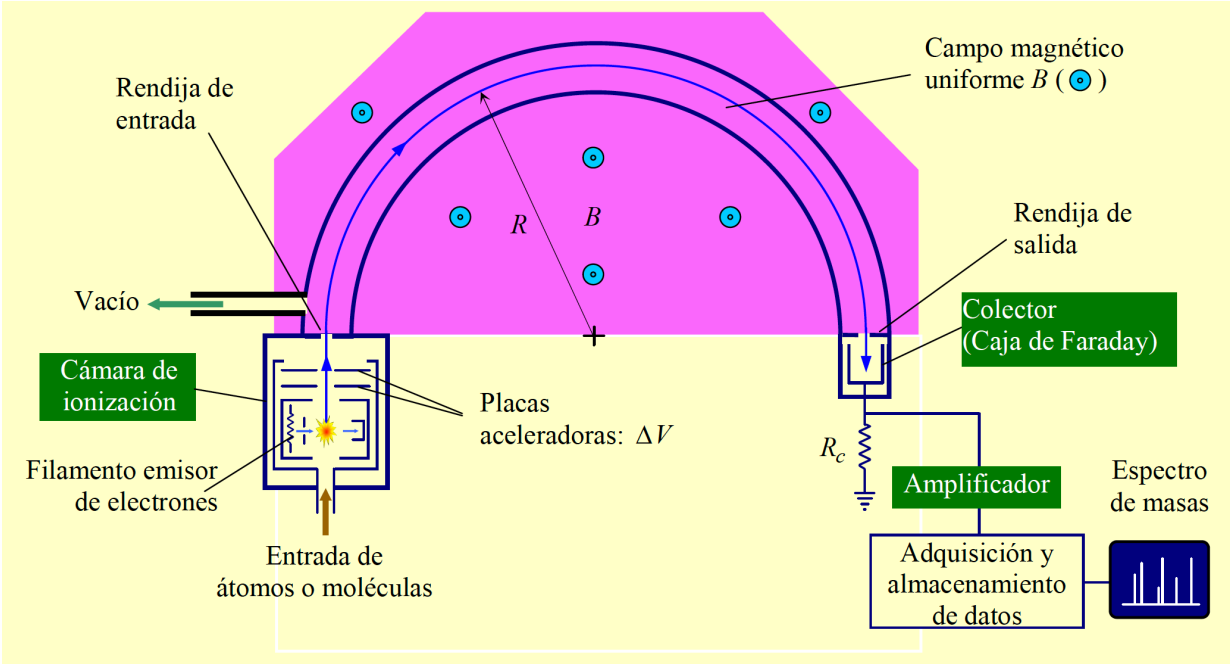


Fig. 1

En la *cámara de ionización*, los electrones emitidos por un filamento incandescente, una vez acelerados, chocan con los átomos o moléculas de un gas, produciendo iones positivos. Supondremos, por sencillez, que los iones producidos tienen carga eléctrica $+e$, siendo $e = 1{,}60218 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, y que "nacen" con velocidad nula. Mediante un campo eléctrico poco intenso se conducen hacia las *placas aceleradoras*, entre las que existe una diferencia de potencial ΔV, (figura 2). Los iones que allí entran son acelerados por el campo eléctrico $\vec{E}$ existente entre dichas placas y salen con una velocidad v_0.

A través de la *rendija de entrada*, estos iones penetran con la velocidad v_0 en una región en la que hay un campo magnético uniforme (región sombreada de la figura 1), de módulo B y con dirección perpendicular al plano de la figura. Como consecuencia, los iones describen una trayectoria circular.

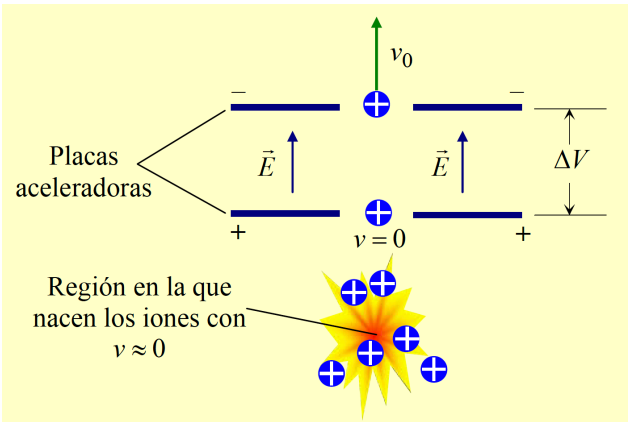


Fig. 2

[1] *Este problema se propuso en la Fase Aragonesa de la XV Olimpiada Española de Física, celebrada en 2004.*

a) Determina el radio de la trayectoria de los iones, R, en función de su masa, m, de su carga eléctrica, e, del potencial acelerador, ΔV, y del campo magnético, B.

b) Comprueba que, en un espectrómetro de este tipo, con $R = 0{,}150$ m y $\Delta V = 3{,}00\,\text{kV}$, el campo magnético B que focaliza los iones en la *rendija de salida* viene dado, en función de la masa m de los iones, por la expresión $B = 0{,}0526\sqrt{m}$, en la que B se obtiene en teslas cuando m se expresa en unidades de masa atómica.

Cuando los iones salen del campo magnético por la *rendija de salida*, son recogidos en un *colector* (caja de Faraday). Los iones que entran en él dan lugar a una corriente eléctrica en la resistencia R_c y, por consiguiente, a una diferencia de potencial entre sus extremos. Este voltaje es proporcional a la cantidad de iones de una determinada relación m/e que llegan al colector por unidad de tiempo. Por lo tanto, será también proporcional a la abundancia de moléculas o átomos de masa m que contenga el gas que se estudia. Variando la intensidad del campo magnético se podrán recoger en el colector iones de distintas masas, dando lugar en R_c a señales que, una vez amplificadas, procesadas y registradas, proporcionan el *espectro de masas* del gas estudiado.

En la figura 3 se muestra el espectro de masas de una mezcla de dos gases nobles. En dicho espectro aparecen los picos correspondientes a los isótopos de cada gas.

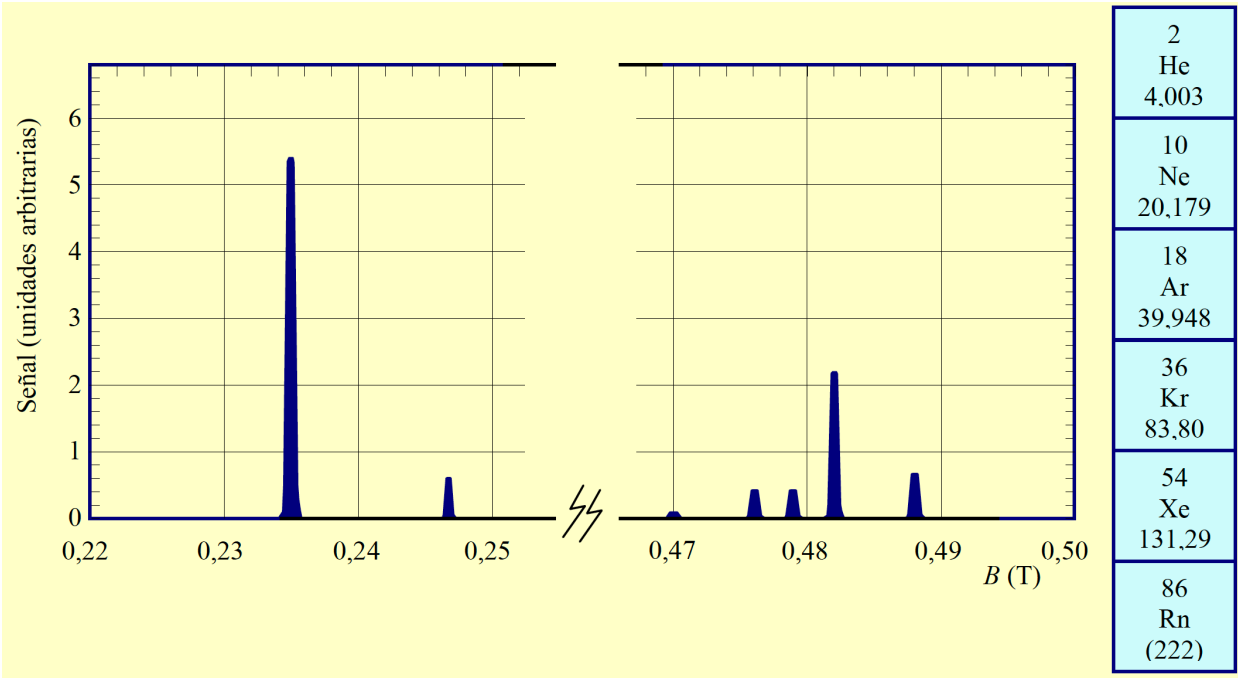


Fig. 2

c) Ayudándote del fragmento de Tabla Periódica que se encuentra junto a la figura 3, determina los gases nobles que componen la mezcla.

Datos: - Unidad de masa atómica, $1\ \text{uma} = 1{,}66054 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$.

P3. Solución

a) Cuando los iones de masa m y carga $+e$ entran con velocidad prácticamente nula en el campo eléctrico existente entre las placas aceleradoras (figura 2), su energía mecánica es exclusivamente potencial electrostática, $e\Delta V$. El campo eléctrico los acelera y salen de él con energía que sólo es cinética, $mv_0^2/2$. Como la energía mecánica debe conservarse

$$e\Delta V = \frac{1}{2}mv_0^2$$

La velocidad de los iones al entrar en la región del campo magnético es

$$v_0 = \sqrt{\frac{2e\Delta V}{m}} \qquad (1)$$

A continuación, sobre los iones que se mueven en el campo magnético actúa la fuerza de Lorentz, indicada en la nota 1 del enunciado

$$\vec{F} = e\vec{v}_0 \times \vec{B}$$

Como $\vec{v}_0$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, el módulo de esta fuerza es

$$F = ev_0B$$

Esta fuerza es siempre perpendicular a la velocidad, de forma que la aceleración de los iones es normal o centrípeta, por lo que

$$ev_0B = m\frac{v_0^2}{R}$$

y, por tanto

$$R = \frac{mv_0}{eB} \qquad (2)$$

Como v_0 es constante[2], el radio de curvatura de la trayectoria que describen los iones es también constante, es decir, desde que entran en el campo magnético por la rendija de entrada hasta que lo abandonan a través de la rendija de salida seguirán una trayectoria circular. Teniendo en cuenta (1) y (2), el radio de esta trayectoria es

$$\boxed{R = \frac{1}{B}\sqrt{2\Delta V\frac{m}{e}}} \qquad (3)$$

b) Despejando B en (3), obtenemos el campo magnético que "conduce" a los iones de masa m hasta la rendija de salida, en función de los datos de construcción del espectrómetro (radio R del tubo y potencial acelerador ΔV)

$$B = \frac{1}{R}\sqrt{2\Delta V\frac{m}{e}}$$

Con los datos numéricos que se indican en el enunciado expresados en unidades del S.I., el valor del campo magnético necesario para focalizar iones de masa m en la rejilla de salida es

$$B = \frac{1}{0{,}150}\sqrt{\frac{2\times 3000}{1{,}60\times 10^{-19}}m} = 1{,}29\times 10^{12}\sqrt{m}$$

[2] Al ser nula la componente tangencial de la aceleración ($a_t = dv/dt$), el módulo de la velocidad de la partícula tiene que ser constante

Como se ha indicado antes, en la expresión anterior la masa m debe estar expresada en kg, pero en espectrometría de masas es habitual la utilización de la unidad de masa atómica, uma, Teniendo en cuenta la equivalencia $1\ \text{uma} = 1{,}660540 \times 10^{-27}\ \text{kg}$, la expresión del campo magnético se convierte en

$$\boxed{B = 0{,}0526\sqrt{m}} \qquad (B \text{ en T; } m \text{ en uma}) \qquad (4)$$

c) En el espectro de la figura 3 se distinguen siete picos, correspondientes a iones que alcanzan el *colector* para siete valores del campo magnético B. En la tabla I se presentan estos valores de B junto con las correspondientes masas de los iones obtenidas a partir de (4).

Lógicamente, estas masas tienen que pertenecer a los isótopos de los dos gases nobles que constituyen la mezcla a la que hace alusión el enunciado.

Utilizando la Tabla Periódica puede concluirse que los dos primeros picos corresponden a masas próximas a 20,179 que es la masa atómica del Ne, luego deben pertenecer a isótopos de dicho gas. Análogamente, los otros cinco picos pueden ser identificados como isótopos del Kr ya que sus masas están en torno a 83,6 que es la masa de este gas noble.

Tabla I							
B (T)	0,235	0,247	0,470	0,476	0,479	0,482	0,488
m (uma)	20,0	22,1	79,8	81,9	82,9	84,0	86,1

En consecuencia, la respuesta a este apartado del problema es: **la mezcla binaria es de Ne-Kr**

Nota: aunque no lo pide explícitamente el enunciado, a partir del espectro de la figura 3 es posible determinar la abundancia relativa de los isótopos de Ne y Kr presentes en la mezcla de gases analizada, que es directamente proporcional a la altura de los picos registrados.

Los dos primeros picos, correspondientes a isótopos del Ne, tienen alturas en la figura 3 de 54 y 6 unidades (arbitrarias). Por tanto, la abundancia total de Ne en la mezcla será proporcional a 60 y la abundancia de cada uno de los isótopos correspondientes será 54/60 = 0,90 y 6/60 = 0,10, es decir un 90% y un 10% respectivamente.

Consultando una tabla adecuada se encuentra que el Ne es una mezcla natural de tres isótopos estables: ^{20}Ne, ^{21}Ne y ^{22}Ne, cuyas abundancias son, respectivamente, 90,48%, 0,27% y 9,25%. Aunque el ^{21}Ne es demasiado poco abundante para ser apreciado en el espectro, las abundancias que hemos deducido para los otros dos isótopos, habida cuenta de la imprecisión en la lectura de las alturas, concuerdan satisfactoriamente con las dadas en la bibliografía.

Análogamente, los otros cinco picos corresponden al Kr, con alturas respectivas de 0,9 , 4,5 , 4,5 , 22 y 6,8 unidades. Por tanto, la abundancia de Kr en la mezcla es proporcional a la suma de estas alturas (38,7) y la relativa de cada isótopo es, respectivamente: 2,3%, 11,6%, 11,6%, 56,8% y 17,6%.

De nuevo estos datos concuerdan aceptablemente con las abundancias relativas de los isótopos estables del Kr, que son: ^{78}Kr (0,35%; no se distingue en el espectro), ^{80}Kr (2,25%), ^{82}Kr (11,6%), ^{83}Kr (11,5%), ^{84}Kr (57,0%) y ^{86}Kr (17,3%).

Por último, las sumas de las alturas de los picos del Ne (60) y del Kr (38,7) son proporcionales a las abundancias de dichos gases en la mezcla. Por consiguiente, se deduce que la mezcla está constituida por un 61% de Ne y un 39% de Kr, aproximadamente.