Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Real Sociedad Española de Física

R.S.E.F.

Universidad Zaragoza

33 Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

2ª PRUEBA

25 de febrero de 2022

Fundación Zaragoza Conocimiento

INMA Instituto de Nanociencia y Materiales de Aragón

Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón Universidad Zaragoza

LSC Laboratorio Subterráneo de Canfranc

Instituto Universitario de Investigación de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos Universidad Zaragoza

Cátedra Inycom Universidad Zaragoza

Inycom

cofis Colegio Oficial de Físicos

Fundación iberCaja

GOBIERNO DE ARAGON Departamento de Educación, Cultura y Deporte

Problema experimental. Pesar el sol

Vera Rubin nació en Filadelfia, EEUU, en 1928 y murió en 2016. Estuvo nominada en varias ocasiones al premio Nobel en Física. Tuvo una dilatada trayectoria en el campo de la Astronomía y Astrofísica. En particular, fue responsable junto a su colega Kent Ford de la medida de las velocidades de rotación de estrellas en los brazos de numerosas galaxias espirales. Estas velocidades se determinan mediante el efecto Doppler en las líneas espectrales observadas.

Sus medidas en el rango visible, junto con las de Albert Bosma en ondas de radio, evidenciaron que la dinámica de las galaxias espirales no se puede explicar con la materia luminosa que identificamos mediante nuestros telescopios. Hace falta otro tipo de materia, la materia oscura, que no emita ni absorba radiación electromagnética de la forma en que lo hace la materia ordinaria que conocemos. Podríamos decir que, a diferencia de lo que sucede en el Sistema Solar, la foto gravitatoria que nos proporciona la curva de rotación de una galaxia espiral no coincide con la foto "visible" de la galaxia.

Inspirada por el trabajo de Vera Rubin, una estudiante de primer curso del Grado de Física decide determinar por sí misma la masa del Sol a partir de la medida de las velocidades de rotación de los planetas del Sistema Solar que puede observar a través de un potente telescopio que sus padres le han regalado como premio por las estupendas calificaciones que obtuvo en las pruebas de acceso a la Universidad.

Modelo teórico.

Si se considera que la dinámica de todos los planetas del Sistema Solar está dominada por el efecto del Sol, podemos utilizar la tercera ley de Kepler para órbitas circulares, o la relación entre fuerza gravitatoria y fuerza centrípeta, para obtener la relación entre la velocidad orbital media de un planeta, *v*, y su distancia media al Sol, *r*, como:

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (1)$$

siendo *M* la masa del Sol y *G* la constante de gravitación universal.

A partir de (1) se puede obtener una relación lineal si expresamos *v* en función de $r^{-1/2}$ en la forma

$$v(r) = \sqrt{GM} \cdot r^{-1/2} \qquad (2)$$

La pendiente de esta recta es $\sqrt{GM}$, a partir de la cual podemos obtener el valor de la masa del Sol, *M*.

Preguntas.

En la siguiente tabla se recogen los valores de velocidad de rotación media de cada planeta alrededor del Sol, *v*, junto con su distancia media al Sol, *r*, expresada en Unidades Astronómicas (UA).

Planeta	***r* (UA)**	***v* (km/s)**
Mercurio	0,39	47,56
Venus	0,72	35,41
Marte	1,52	24,64
Ceres	2,77	20,67
Júpiter	5,20	15,57
Saturno	9,54	9,28
Urano	19,18	6,25
Neptuno	30,06	8,25
Plutón	39,44	6,26

a) Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos $(x,\ y) = (r^{-1/2}, v)$.

b) Determina el valor de la pendiente *p* de la recta que mejor se ajusta a estos puntos.

c) A partir de la pendiente *p* y de la expresión (2) deduce el valor de la masa del Sol, *M*.

d) Haz una estimación razonada de la incertidumbre Δp de la pendiente obtenida en el apartado b).

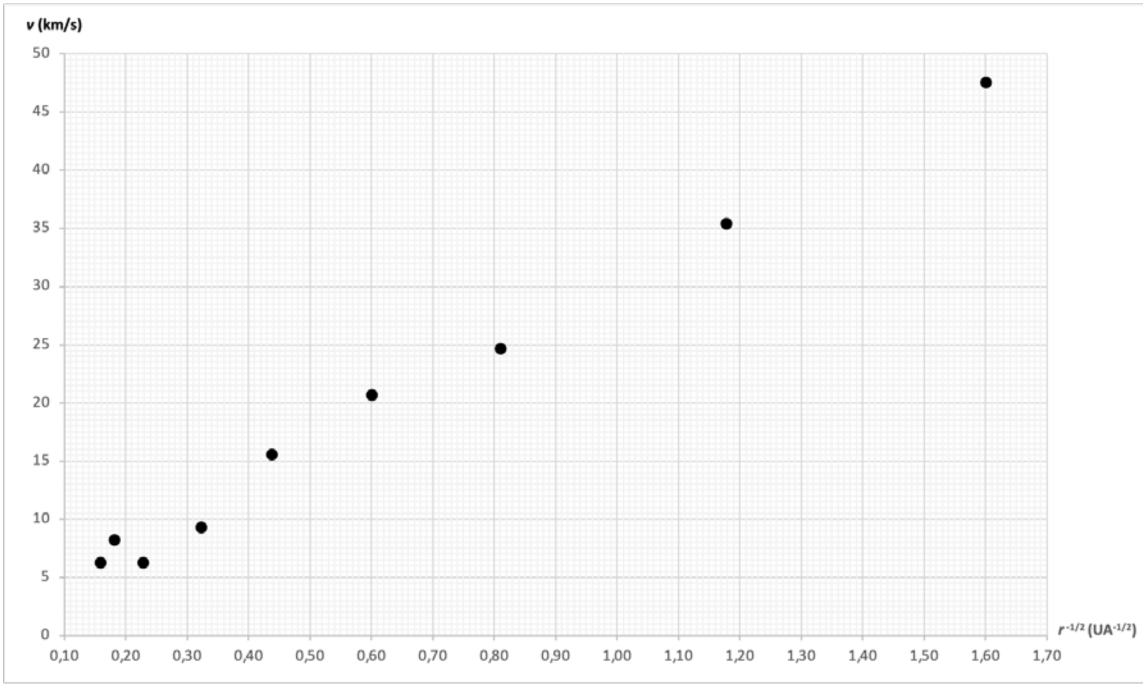
e) Teniendo en cuenta lo anterior, haz una estimación de la incertidumbre ΔM en el valor de la masa del Sol que has obtenido en c).

Datos: - Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}$

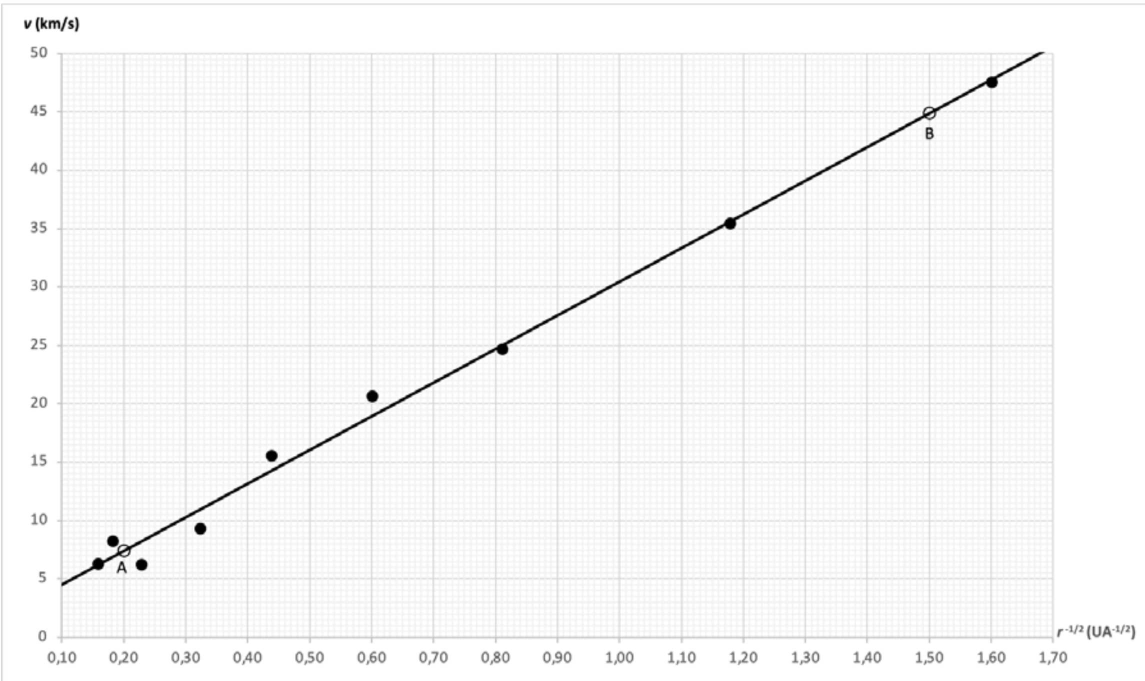
- Unidad Astronómica (distancia promedio Tierra-Sol), $1\ \mathrm{UA} = 1,5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$

Problema experimental. Solución

a) A continuación se presenta la gráfica pedida, con el aspecto que tendría dibujada en papel milimetrado.



b) Para determinar de forma "manual" la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales se busca la recta que mejor pasa por los puntos, es decir, la que pasa lo más cerca posible de todos ellos y de forma que queden igual de dispersos a cada lado.



Tomamos dos puntos auxiliares alejados sobre esta recta (no puntos experimentales), por ejemplo A(0,2; 7,5) y B(1,5; 45). La pendiente de la recta es

$$\boxed{p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{45 - 7{,}5}{1{,}5 - 0{,}2} = 28{,}85\ \mathrm{km\cdot UA^{1/2}/s} = 1{,}12\cdot 10^{10}\ \mathrm{m^{3/2}/s}}$$

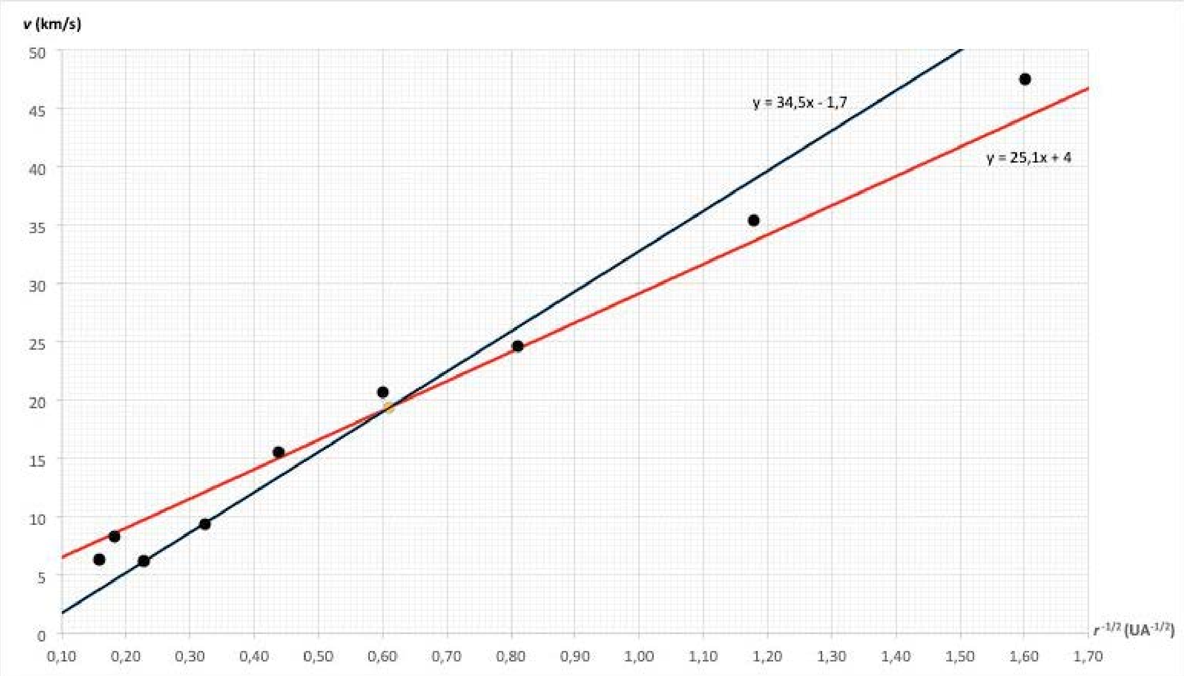
Un ajuste analítico por el método de *mínimos cuadrados* conduce a:

$$p = 28{,}82\ \mathrm{km\cdot UA^{1/2}/s}$$

c) De acuerdo con la expresión (2) del enunciado, se espera que la dependencia de v con $1/r^{1/2}$ sea lineal, con pendiente

$$p = \sqrt{GM} \quad \rightarrow \quad M = \frac{p^2}{G} \quad \rightarrow \quad \boxed{M = 1{,}88\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}}$$

d) Para hacer una estimación de la incertidumbre Δp trazamos, de nuevo “a ojo”, las rectas que pasando por el “centro” de los puntos, $(\bar{x}, \bar{y}) = (0{,}6; 19{,}3)$ y, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales.



La incertidumbre estimada de la pendiente, Δp, vendrá dada por

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta p = \frac{34{,}5 - 25{,}1}{2} = 5\ \mathrm{km\cdot UA^{1/2}/s} = 2\cdot 10^{9}\ \mathrm{m^{3/2}/s}}$$

Dado que sólo tenemos 10 puntos experimentales, la incertidumbre se da con una cifra significativa, de modo que la pendiente con su incertidumbre será

$$\boxed{p = (1{,}1 \pm 0{,}2)\cdot 10^{10}\ \mathrm{m^{3/2}/s}}.$$

e) Tomando los valores máximo y mínimo de p, obtenemos los valores máximo y mínimo de la masa del sol,

$$p_{\max} = 1{,}3\cdot 10^{10}\ \mathrm{m^{3/2}/s} \quad \rightarrow \quad M_{\max} = \frac{p_{\max}^2}{G} \quad \rightarrow \quad M_{\max} = 2{,}5\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

$$p_{\min} = 0{,}9\cdot 10^{10}\ \mathrm{m^{3/2}/s} \quad \rightarrow \quad M_{\min} = \frac{p_{\min}^2}{G} \quad \rightarrow \quad M_{\min} = 1{,}2\cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$$

Una estimación de la incertidumbre de masa del Sol vendrá dada por

$$\Delta M = \frac{M_{\max} - M_{\min}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta M = \frac{2,5\cdot 10^{30} - 1,2\cdot 10^{30}}{2} = 0,6\cdot 10^{30}\ \text{kg}}$$

Donde hemos tenido en cuenta que la incertidumbre se da con una cifra significativa. Así, a partir de los datos experimentales obtenidos por la astrónoma aficionada podemos concluir que

$$\boxed{M = (1,9 \pm 0,6)\cdot 10^{30}\ \text{kg}}$$

Se debe tener en cuenta que las medidas realizadas por personas aficionadas a la astronomía tienen una precisión mucho menor que las que se pueden obtener en cualquier observatorio astronómico, lo cual afecta a la incertidumbre del resultado final obtenido. El valor actualmente aceptado para la masa del Sol es $M = (1,98847 \pm 0.00007)\cdot 10^{30}\ \text{kg}$, estando la precisión de su medida limitada por la incertidumbre en la determinación actual de la constante *G* (un 0,015 %), mientras que el producto *GM* se conoce con mucha mayor precisión (un $7\cdot 10^{-10}\ \%$). Las velocidades de rotación de los planetas alrededor del Sol conocidas dan una estimación de la masa solar mucho mejor que la que resulta a partir de los datos propuestos en esta prueba experimental.