Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

R.S.E.F.
Real Sociedad Española de Física

Universidad Zaragoza
1542

33 Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

1ª PRUEBA

25 de febrero de 2022

FZC Fundación Zaragoza Conocimiento

INMA INSTITUTO DE NANOCIENCIA Y MATERIALES DE ARAGÓN

I3A Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón Universidad Zaragoza

LSC Laboratorio Subterráneo de Canfranc

bifi Instituto Universitario de Investigación de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos Universidad Zaragoza

Cátedra Inycom Universidad Zaragoza
Inycom

cofis Colegio Oficial de Físicos

Fundación ibercaja

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

P1. Mira arriba.

En la película "No mires arriba" (2021), la estudiante de doctorado Kate Dibiasky descubre cerca de la órbita de Júpiter un meteorito, al que se da el nombre de su descubridora, y que se dirige directamente hacia la Tierra, de 10 km de diámetro, tamaño similar al del meteorito que produjo la extinción de los dinosaurios. Para evitar el impacto del meteorito Dibiasky con la Tierra se programa el lanzamiento de un conjunto de naves que deben chocar contra él y desviar su trayectoria. Vamos a tratar de analizar la viabilidad de semejante misión.

Considera (Figura 1) que un meteorito de masa m cae radialmente hacia el centro de la Tierra, partiendo con velocidad igual a cero a una gran distancia de la misma (por simplicidad, despreciamos la interacción gravitatoria del meteorito con el resto de cuerpos del Sistema Solar). A una distancia r de la Tierra un satélite de intercepción de cometas, de masa m', describe una órbita circular. El satélite y el meteorito tienen una colisión completamente inelástica, saliendo juntos después de la misma, moviéndose el objeto conjunto C en una órbita que es rasante a la Tierra y que, por tanto, evita el choque con la misma (Figura 2).

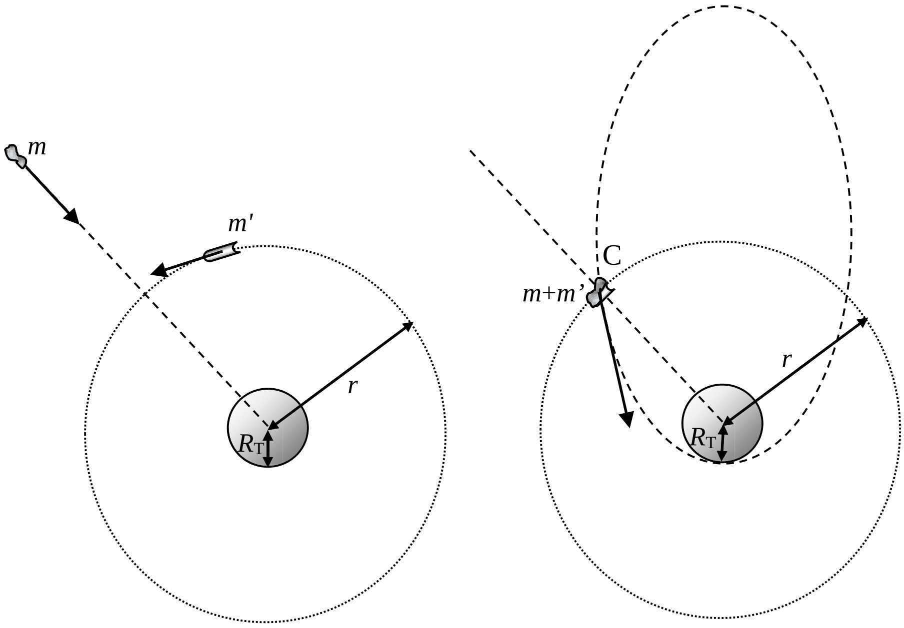

Fig. 1 Fig. 2

a) ¿Cuál es la velocidad del meteorito y del satélite inmediatamente antes de la colisión?

b) ¿Cuál es el vector velocidad del objeto C inmediatamente después de la colisión? Utiliza un vector unitario radial y un vector unitario tangencial a la trayectoria circular del satélite

c) Halla la velocidad de C en el perigeo.

d) A partir de la conservación de la energía de C, calcula la masa m' del satélite interceptor necesaria para que el meteorito no impacte con la tierra, en función del radio r de la órbita circular inicial del satélite.

Considera que el meteorito Dibiasky tiene una forma aproximadamente esférica y una densidad $\rho = 2{,}5\ \text{g/cm}^3$. La intercepción se produce a una distancia $r = 4\cdot 10^6$ km

e) Calcula la masa m del meteorito.

f) Determina numéricamente la masa m' que debe tener el satélite. ¿Consideras viable poner en órbita dicha masa?

Dato: Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37\cdot 10^3$ km

P1. Solución

a) Para el asteroide

$$-G\frac{Mm}{r}+\frac{1}{2}mv_{ast}^{2}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_{ast}=\sqrt{2G\frac{M}{r}}} \qquad (1)$$

donde M es la masa de la Tierra. Para el satélite,

$$G\frac{Mm'}{r^2}=m'\frac{v_{sat}^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_{sat}=\sqrt{G\frac{M}{r}}} \qquad (2)$$

b) En una colisión se conserva el momento lineal.

Considerando un vector unitario radial, $\vec{u}_r$, cuya dirección pasa por el centro de la Tierra y cuyo sentido va hacia el exterior de la misma, y un vector unitario tangencial, $\vec{u}_t$, tangente a la trayectoria circular del satélite de radio r y aplicando la conservación del momento lineal:

$$m\sqrt{2G\frac{M}{r}}(-\vec{u}_r)+m'\sqrt{G\frac{M}{r}}\vec{u}_t=(m+m')\vec{v}_{f\ objeto}$$

$$\boxed{\vec{v}_{f\ objeto}=\frac{m}{(m+m')}\sqrt{2G\frac{M}{r}}(-\vec{u}_r)+\frac{m'}{(m+m')}\sqrt{G\frac{M}{r}}\vec{u}_t} \qquad (3)$$

c) El objeto se mueve bajo la acción de la fuerza de la gravedad, orientada hacia el centro de la Tierra. El momento de esta fuerza respecto del centro de la Tierra es cero permanentemente, luego se conserva el momento angular.

Tras la colisión el momento angular es

$$\vec{L}=(m+m')r\vec{u}_r\times\left[\frac{m}{(m+m')}\sqrt{2G\frac{M}{r}}(-\vec{u}_r)+\frac{m'}{(m+m')}\sqrt{G\frac{M}{r}}\vec{u}_t\right]$$
$$=m'r\sqrt{\frac{GM}{r}}\vec{k}=m'\sqrt{GMr}\,\vec{k} \qquad (4)$$

siendo $\vec{k}$ un vector unitario perpendicular al plano de la figura 2 y dirigido hacia el lector.

En el perigeo el vector velocidad será perpendicular a la dirección radial y el vector momento angular será

$$\vec{L}_p=R_T(m+m')v_p\vec{k} \qquad (5)$$

Por la conservación del momento angular, $\vec{L}=\vec{L}_p$

$$m'\sqrt{GMr}=R_T(m+m')v_p \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_p=\frac{m'}{(m+m')R_T}\sqrt{GMr}} \qquad (6)$$

d) A partir de la velocidad de C obtenida en la ecuación (3), la energía mecánica de C en el punto de impacto es

$$E_{mec}=-G\frac{M(m+m')}{r}+\frac{1}{2}(m+m')\left[\frac{m^2}{(m+m')^2}\frac{2GM}{r}+\frac{m'^2}{(m+m')^2}\frac{GM}{r}\right]=$$
$$=-G\frac{Mm'}{2r}\left(\frac{m'+4m}{m+m'}\right) \qquad (7)$$

En la nueva órbita, tras la colisión, se conserva la energía mecánica, de modo que de la conservación de energía entre el punto de impacto y el perigeo se tiene

$$-G\frac{Mm'}{2r}\left(\frac{m'+4m}{m+m'}\right)=-G\frac{M(m+m')}{R_T}+\frac{1}{2}(m+m')\left(\frac{m'}{(m+m')R_T}\sqrt{GMr}\right)^2 \qquad (8)$$

Arreglando y simplificando la expresión (8) obtenemos una ecuación de segundo grado para *m'*,

$$\left(R_T-r\right)^2 m'^2+4mR_T\left(R_T-r\right)m'-2rR_Tm^2=0 \qquad (9)$$

De donde

$$m'=\frac{2R_T\pm\sqrt{4R_T^2+2rR_T}}{\left(r-R_T\right)}m \qquad (10)$$

Como $r > R_T$, la solución con "-" no tiene sentido físico pues daría un valor negativo de *m'*, así pues,

$$\boxed{m'=\frac{2R_T+\sqrt{4R_T^2+2rR_T}}{\left(r-R_T\right)}m=0,06m} \qquad (11)$$

e) El radio del meteorito Dibiasky es $R_D=5\,\text{km}=5\cdot10^3\,\text{m}$ y su densidad es $\rho=2,5\,\text{g/cm}^3=2,5\cdot10^3\,\text{kg}/\text{m}^3$. Su volumen vendrá dado por

$$V=\frac{4}{3}\pi R_D^3 \qquad (12)$$

De modo que su masa será

$$m=\rho V=\frac{4}{3}\pi\rho R_D^3 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{m=1,3\cdot10^{15}\,\text{kg}} \qquad (13)$$

f) Sustituyendo *m* en la expresión (11) obtenemos

$$\boxed{m'=7,8\cdot10^{13}\,\text{kg}}$$

La tecnología actual no permite poner en órbita una masa tan grande. Una posible solución alternativa, que se sugiere en la película "No mires arriba", sería enviar cargas nucleares que exploten en la superficie del meteorito, de forma que el material eyectado en la explosión produzca un impulso que lleve a una desviación suficiente. En todo caso, nos movemos en los límites de la ciencia ficción, aunque actualmente se ensayan técnicas de desviación, como es el caso del proyecto DART de la NASA.

P2. Carga oscilante.

Considera dos pequeñas esferas sujetas en los extremos de una varilla no conductora de longitud 2*d* (Figura 1). Una tercera esfera C tiene masa *m* y puede deslizar sin rozamiento en la varilla. Las tres esferas son no conductoras y cada una tiene una carga eléctrica *q* distribuida sobre su superficie. Se separa la esfera C una distancia *x* de la posición de equilibrio O.

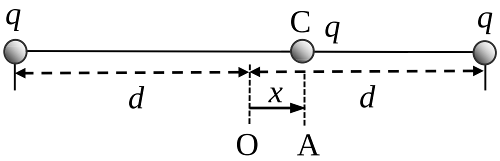

Fig. 1

a) Halla la expresión de la fuerza que actúa sobre la esfera C cuando se encuentra a distancia *x* de la posición de equilibrio.

b) ¿Cuál es la expresión de la fuerza sobre la esfera C si se considera que $x << d$?

Se desplaza la esfera C hasta un punto A, a una distancia $x = d/20$ hacia la derecha de O, como se observa en la figura, y se libera.

c) Calcula la velocidad que llevará la esfera C cuando pase por la posición de equilibrio O.

d) Calcula la frecuencia angular de oscilación de la esfera C alrededor de la posición de equilibrio.

e) ¿Cuánto tiempo tardará la esfera C en ir desde A hasta O.

f) Para $q = 10\ \mathrm{nC}$, $d = 10\ \mathrm{cm}$ y $m = 1\ \mathrm{g}$, calcula el valor del periodo *T* de una oscilación completa de la esfera C alrededor del punto O.

Datos: * Constante de Coulomb, $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot C^{-2}}$

* $1\ \mathrm{nC} = 10^{-9}\ \mathrm{C}$

P2. Solución

a) La fuerza sobre la esfera cargada C será la suma de las fuerzas producidas sobre ella por cada una de las esferas cargadas de los extremos, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Ambas fuerzas son repulsivas. La fuerza que ejerce cada una de las esferas sobre la esfera C es la misma que se ejercería entre dos cargas puntuales,

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{(d+x)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q^2 d\cdot x}{(d-x)^2(d+x)^2}} \qquad (1)$$

b) Si $x << d$, podemos aproximar $(d-x)^2 \approx d^2$ y $(d+x)^2 \approx d^2$ en la expresión (1) de modo que

$$\boxed{F \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q^2 x}{d^3}} \qquad (2)$$

c) La fuerza eléctrica sobre la carga q es conservativa, por lo tanto, se conserva la energía mecánica entre A y O.

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\left(d+\frac{d}{20}\right)} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{\left(d-\frac{d}{20}\right)} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{d} + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \boxed{v = 0{,}1\sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q^2}{md}}} \qquad (3)$$

d) En la expresión (2) se observa que la fuerza F es proporcional a la distancia x de separación de la posición de equilibrio, y de sentido contrario, similar a una fuerza elástica $F = -Kx$, a partir de lo que podemos determinar la "constante elástica" K del sistema,

$$Kx = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q^2 x}{d^3} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q^2}{d^3} \qquad (4)$$

La frecuencia angular ω de oscilación alrededor de la posición de equilibrio vendrá dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{4q^2}{md^3}}} \qquad (5)$$

e) El tiempo que tardará la partícula C en ir de A hasta O será un cuarto del periodo T, tiempo que tarda en realizar una oscilación completa y volver a A. A partir de la expresión (5) se obtiene

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{md^3}{(1/4\pi\varepsilon_o)}} \qquad (6)$$

De modo que el tiempo para ir de A hasta O será

$$t = \frac{T}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{\pi}{4q}\sqrt{\frac{md^3}{(1/4\pi\varepsilon_o)}}} \qquad (7)$$

f) Expresando q, m y d en unidades del Sistema Internacional y sustituyendo en la expresión (6) obtenemos

$$\boxed{T = 3{,}31\,\text{s}}$$

P3. Una aproximación a las fibras ópticas[1].

Las fibras ópticas han revolucionado el mundo de las telecomunicaciones en las últimas décadas. Su funcionamiento está basado en las leyes de la reflexión y de la refracción (ley de Snell), en particular en el fenómeno de la *reflexión total.* Esquemáticamente (figura 1) una fibra óptica es un fino hilo de material transparente, llamado núcleo, por el que se propaga la luz sufriendo sucesivas reflexiones totales, pues está rodeado por otro material, llamado revestimiento, de menor índice de refracción.

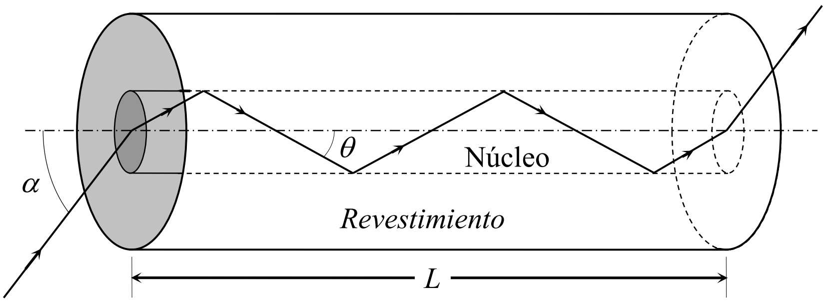

Fig. 1

a) Si $n_{\text{nuc}} = 1{,}465$ y $n_{\text{rev}} = 1{,}460$, determina el máximo ángulo respecto al eje, $\theta_{\max}$, con que puede viajar la luz dentro del núcleo para que se produzcan reflexiones totales al alcanzar el revestimiento. ¿A qué ángulo de iluminación, $\alpha_{\max}$, desde el exterior ($n_{\text{aire}} = 1{,}000$) corresponde esta situación?

Todos los rayos que inciden sobre la entrada del núcleo con $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$ se propagarán confinadamente por la fibra, pero siguiendo caminos diferentes, y por tanto tardando tiempos diferentes en alcanzar el extremo de salida. Dato: velocidad de la luz en el vacío, $c = 2{,}998 \times 10^8$ m/s .

b) Calcula las longitudes, L_0 y $L_{\max}$ recorridas por la luz en los casos extremos $\alpha = 0$ y $\alpha = \alpha_{\max}$, y los tiempos de tránsito correspondientes, t_0 y $t_{\max}$, para una longitud de fibra $L = 1000$ m.

La luz que viaja por la fibra es producida por un LED o un diodo láser que ilumina su entrada en un amplio margen de ángulos de incidencia. La señal a transmitir (por ejemplo, una conexión de internet o una conversación telefónica) se codifica digitalmente mediante una rápida sucesión de pulsos de luz, "bits" (figura 2), según un código binario preestablecido, de forma que un sistema detector al final de la fibra pueda reconocer estos pulsos luminosos y descifrar (decodificar) el mensaje que transportan.

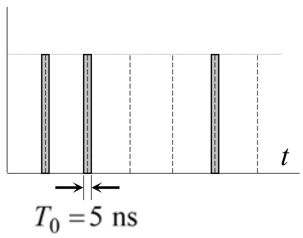

Fig. 2

En el segundo apartado se ha visto que el tiempo de tránsito de la luz por la fibra depende del ángulo de propagación. Este fenómeno, llamado dispersión, es indeseable para los fines prácticos de comunicación digital, pues ensancha los pulsos transmitidos y tiende a superponer dos consecutivos, de forma que el detector puede llegar a no distinguirlos y la información se pierde.

c) Supón que los pulsos luminosos que inciden sobre la fibra cubren todo el margen de ángulos de incidencia, entre $\alpha = 0$ y $\alpha = \alpha_{\max}$. Si la duración inicial de los pulsos es $T_0 = 5$ ns, tal como indica la figura 2, calcula la duración total de los pulsos de salida, *T*.

d) Calcula la frecuencia máxima de transmisión de los pulsos, $f_{\max}$, para que puedan ser distinguidos por el detector a la salida de la fibra. Para aumentar la capacidad de transmisión del sistema, interesa que esta frecuencia sea lo más alta posible. ¿Cómo modificarías los datos de diseño de la fibra para conseguirlo?

[1] Este problema fue propuesto en la 24 Olimpiada Española de Física celebrada en 2013 en la Universidad de Lleida.

P3. Solución

Cuando la de luz incide desde un medio de índice *n* hacia otro de índice *n'*, la ley de Snell establece

$$n \operatorname{sen} \varepsilon = n' \operatorname{sen} \varepsilon' \qquad (1)$$

donde ε y ε' son los ángulos de incidencia y refracción, respecto a la normal a ambas superficies. Si $n' < n$, se tendrá que $\operatorname{sen} \varepsilon' > \operatorname{sen} \varepsilon$, y por tanto $\varepsilon' > \varepsilon$ (figura 3). El *ángulo límite* ε_l se define como aquél al que corresponde el máximo ángulo de refracción, $\varepsilon' = \pi/2$ (figura 4), es decir

$$n \operatorname{sen} \varepsilon_l = n' \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_l = \operatorname{arc sen}(n'/n) \qquad (2)$$

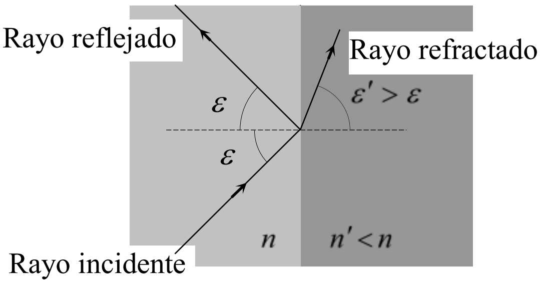

Fig. 3

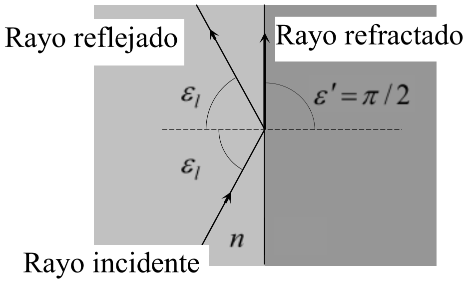

Fig. 4

Para incidencia con ángulo superior al límite, $\varepsilon > \varepsilon_l$, la ecuación (1) no tiene solución real para ε', pues sería necesario que $\operatorname{sen} \varepsilon' > 1$. En estas circunstancias no existe rayo refractado; toda la energía luminosa se refleja en la superficie de separación entre los dos medios, con ángulo de reflexión igual al de incidencia, Este es el conocido fenómeno de "reflexión total".

a) En nuestro problema, la luz incide desde el núcleo hacia el revestimiento, con

$$n = n_{\text{nuc}} = 1{,}465 \; > \; n' = n_{\text{rev}} = 1{,}460$$

Por tanto, se producirá reflexión total cuando el ángulo de incidencia sea mayor que el límite, que puede calcularse teniendo en cuenta (2). Se obtiene

$$\varepsilon_l = 85{,}265^\circ$$

El ángulo que se pide, θ, es el complementario de ε, (figura 5). Para que se produzcan reflexiones totales debe ser

$$\varepsilon > \varepsilon_l = 85{,}265^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{\text{max}} = 4{,}735^\circ}$$

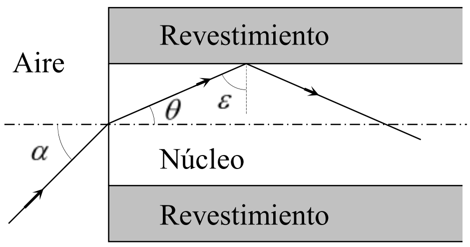

Fig. 5

El ángulo de propagación respecto al eje, θ, es el ángulo de refracción respecto a la entrada de la luz en el núcleo de la fibra, procedente del aire. Como el índice del aire es la unidad, se cumplirá

$$\operatorname{sen} \alpha_{\text{max}} = n_{\text{nuc}} \operatorname{sen} \theta_{\text{max}} = n_{\text{nuc}} \cos \varepsilon_l \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{\text{max}} = 6{,}946^\circ}$$

b) Los rayos que inciden desde el aire sobre el núcleo con $\alpha = 0$ viajarán por la fibra con $\theta = 0$, en paralelo al eje y sin sufrir reflexiones totales en el revestimiento. Por tanto, han de recorrer una distancia

$$\boxed{L_0 = L = 1000 \text{ m}}$$

La velocidad de propagación de la luz dentro del núcleo es $v = c/n_{\text{nuc}}$, donde $c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. Por tanto, el tiempo que tardarán los rayos de luz en recorrer la fibra, para $\alpha = 0$, es

$$t_0 = \frac{L_0}{v} = \frac{L\,n_{\text{nuc}}}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_0 = 4{,}887 \ \mu\text{s}}$$

Los rayos que inciden desde el aire sobre el núcleo con $\alpha = \alpha_{\max}$ viajarán por la fibra con $\theta = \theta_{\max}$, de forma que la longitud realmente recorrida es

$$L_{max} = \frac{L}{\cos\theta_{max}} = \frac{L}{\operatorname{sen}\varepsilon_l} = \frac{n_{\text{nuc}}}{n_{\text{rev}}} L \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{L_{\max} = 1003{,}4 \text{ m}}$$

El tiempo de recorrido por la fibra para $\alpha = \alpha_{\max}$ será, por tanto

$$t_{\max} = \frac{L_{\max}}{v} = \frac{L_{\max}\,n_{\text{nuc}}}{c} = \frac{n_{\text{nuc}}}{n_{\text{rev}}} t_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_{\max} = 4{,}903 \ \mu\text{s}}$$

c) Cada pulso de luz es transmitido por la fibra mediante rayos correspondientes a todo el margen de admisión a la entrada, $0 \le \alpha \le \alpha_{\max}$, de forma que la luz que ha entrado en la fibra en un cierto instante t llega al final entre $t + t_0$ y $t + t_{\max}$, durante un intervalo de tiempo

$$\Delta t = t_{\max} - t_0 \approx 16 \text{ ns}$$

Como los pulsos tienen una duración inicial $T_0 = 5$ ns, a la salida de la fibra serán mucho más anchos, con una duración

$$T = T_0 + \Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T \approx 21 \text{ ns}}$$

Además, serán menos intensos, pues la energía inyectada se reparte en un mayor intervalo de tiempo.

d) La separación temporal mínima entre dos pulsos consecutivos, para que no se solapen en el detector, es precisamente T. Esto corresponde a una frecuencia máxima de transmisión de pulsos

$$f_{\max} = \frac{1}{T} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{f_{\max} \approx 47 \text{ MHz}}$$

Para aumentar f_{max} es necesario reducir T, o sea Δt.

$$\Delta t = t_{\max} - t_0 = t_0 \left(\frac{n_{\text{nuc}}}{n_{\text{rev}}} - 1 \right) = \frac{L\,n_{\text{nuc}}}{c\,n_{\text{rev}}} \left(n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}} \right)$$

Por tanto, para una L dada, un aumento de la frecuencia $f_{\max}$ requiere:

$$\boxed{\text{Reducir la diferencia de índices entre el núcleo y revestimiento, } n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}}.}$$

En nuestro problema, $n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}} = 0{,}005$. Si, por ejemplo, la diferencia fuese $n_{\text{nuc}} - n_{\text{rev}} = 0{,}001$, Δt se reduciría en un factor 5 y, $f_{\max}$ aumentaría a unos 120 MHz.

Nota: En las fibras reales la luz no puede viajar confinada para cualquier ángulo $\theta < \theta_{max}$, sino sólo para algunos ángulos concretos, correspondientes a los llamados *modos de propagación* de la fibra. Para comprender cualitativamente este fenómeno basta plantearse el problema desde el punto de vista de un observador que viajase en paralelo al eje de la fibra y con la misma velocidad de avance de la luz a lo largo de dicho eje. Este observador vería luz viajando en una trayectoria rectilínea perpendicular al eje y sufriendo repetidas reflexiones en las fronteras núcleo-revestimiento (hacia arriba y hacia abajo en la figura 1). La interferencia de estas ondas sólo sería constructiva cuando se cumpliese una condición de tipo onda estacionaria para la luz en las dimensiones transversales del núcleo. Esta condición conduce a una cuantización de los posibles ángulos de propagación de la luz respecto al eje de la fibra.