XXI Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

PRUEBAS DE ARAGÓN

PRIMERA PRUEBA

26 de febrero de 2010

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas

Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

Subvenciona:

P1.- Zancos saltadores

El inspector Gadget, personaje de una serie de cómic, utiliza unos muelles pegados a sus zapatos para realizar saltos espectaculares. Algunos deportistas atrevidos intentan emularlo, utilizando unos zancos desarrollados por la industria aeroespacial que les permiten dar saltos de casi 2 m o hacer "footing" a más de 40 km/h (figura 1).


Fig. 1

El estudio detallado de la mecánica de estos saltos es complicado. Para simplificarlo, vamos a adoptar un modelo sencillo constituido por un bloque de masa m sujeto a la parte superior de un muelle ideal sin masa, de longitud natural L_0 y constante elástica k.

Si dejamos caer el sistema, partiendo m de una altura inicial y_{ini} (figura 2a), caerá verticalmente, chocará con el suelo y rebotará hacia arriba. Durante el descenso, m pasa sucesivamente por tres posiciones singulares:

- El extremo inferior del muelle alcanza el suelo (figura 2b).
- El bloque pasa por una altura, y_{eq}, en la que la fuerza neta que actúa sobre él es nula (figura 2c). Esta sería la altura del bloque en equilibrio si el sistema se apoyase suavemente sobre el suelo.
- El bloque se detiene momentáneamente a una altura mínima, y_{min}, antes de empezar a subir (figura 2d).

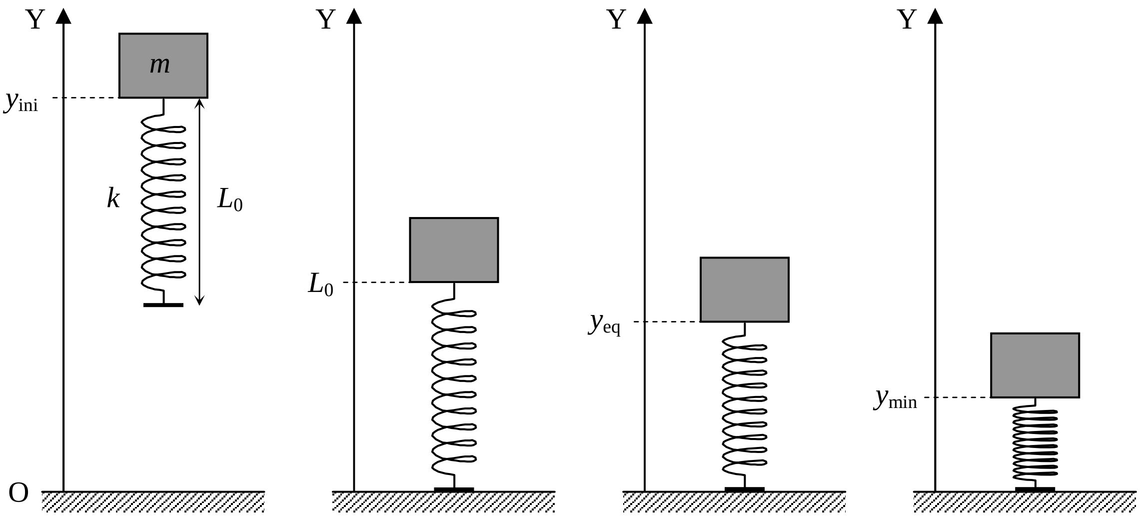


Fig. 2a Fig. 2b Fig. 2c Fig. 2d

Supón que se conocen L_0, y_{ini} e y_{min}, además de la aceleración de la gravedad, g. Contesta las siguientes preguntas, expresando tus resultados en función de los datos anteriores:

a) Determina la relación k/m entre la constante del muelle y la masa del bloque.

b) Determina la altura de equilibrio, y_{eq}.

c) Describe la aceleración de m en los siguientes intervalos:

- Desde $y = y_{ini}$ hasta $y = L_0$.
- Desde $y = L_0$ hasta $y = y_{min}$.

d) En la caída, ¿a qué altura y_1 es máxima la aceleración del bloque? ¿Cuál es su valor, a_{max}?

Para las dos siguiente preguntas, toma como datos numéricos:

$$L_0 = 80 \text{ cm} \;;\quad y_{ini} = 2{,}0 \text{ m} \;;\quad y_{min} = 20 \text{ cm} \;;\quad g = 9{,}8 \text{ m/s}^2.$$

e) Calcula los valores de k/m, y_{eq} y a_{max}.

f) Haz una representación gráfica de a/g en función de y, para $y_{min} \le y \le y_{ini}$.

Solución P1.- Zancos saltadores

Durante todo el proceso de caída del sistema, las fuerzas que actúan sobre *m* y realizan trabajo son el peso y la fuerza elástica, ambas conservativas. Desde que el sistema toca el suelo, actúa además la reacción normal, que no realiza trabajo pues su punto de aplicación no se mueve. En consecuencia, en este modelo simplificado se conserva la energía mecánica

$$E_c + E_g + E_e = \text{cte}$$

Donde

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 ; \qquad E_g = m g y \;;$$

$$E_e = \frac{1}{2} k\, x^2 = \frac{1}{2} k \left(L_0 - y \right)^2 \text{ para } y \le L_0 \;; \qquad E_e = 0 \text{ para } y > L_0$$

a) Aplicando la conservación de la energía entre las posiciones $y = y_{\text{ini}}$ e $y = y_{\text{min}}$, se tiene

$$m\, g\, y_{\text{ini}} = m\, g\, y_{\text{min}} + \frac{1}{2} k \left(L_0 - y_{\text{min}} \right)^2$$

De donde se obtiene

$$\boxed{\frac{k}{m} = \frac{2\left(y_{\text{ini}} - y_{\text{min}} \right)}{\left(L_0 - y_{\text{min}} \right)^2} g} \tag{1}$$

b) Cuando el bloque pasa por la altura y_{eq}, la fuerza neta sobre el bloque es nula.

$$m\, g - k\left(L_0 - y_{\text{eq}} \right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y_{\text{eq}} = L_0 - \frac{m}{k} g$$

Teniendo en cuenta (1), se obtiene

$$\boxed{y_{\text{eq}} = L_0 - \frac{\left(L_0 - y_{\text{min}} \right)^2}{2\left(y_{\text{ini}} - y_{\text{min}} \right)}} \tag{2}$$

c) La aceleración de *m*, tomando sentido positivo hacia arriba, es

- Desde $y = y_{\text{ini}}$ hasta $y = L_0$, el sistema cae libremente, es decir

$$\boxed{a = -g} \tag{3}$$

- Desde $y = L_0$ hasta $y = y_{\text{min}}$, la fuerza elástica actúa sobre el bloque, frenando su movimiento descendente. En virtud de la 2ª ley de Newton se tiene

$$m a = -m g + k\left(L_0 - y \right) \qquad \Rightarrow$$

$$a = -g + \frac{k}{m}\left(L_0 - y \right) \tag{4}$$

Teniendo en cuenta (1)

$$\boxed{a = \left[-1 + \frac{2\left(y_{\text{ini}} - y_{\text{min}} \right)}{\left(L_0 - y_{\text{min}} \right)^2} \left(L_0 - y \right) \right] g} \tag{5}$$

d) De las expresión (4) se deduce que el máximo valor de la aceleración corresponde al mínimo valor de *y*, es decir

$$\boxed{y_1 = y_{min}}$$

En consecuencia, la aceleración máxima es

$$a_{max} = -g + \frac{k}{m}\left(L_0 - y_{min}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{max} = \left(\frac{2y_{ini} - y_{min} - L_0}{L_0 - y_{min}}\right) g} \qquad (6)$$

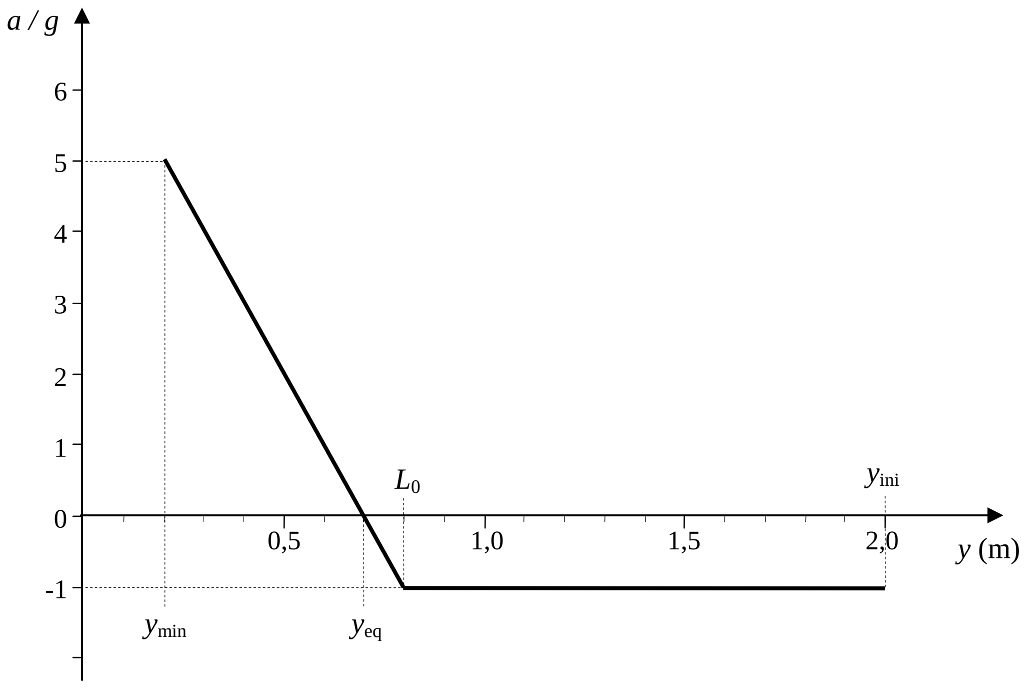
e) Sustituyendo los datos del problema en las expresiones (1), (2) y (6), se obtiene, respectivamente

$$\boxed{\frac{k}{m} = 98 \text{ s}^{-2}}$$

$$\boxed{y_{eq} = 70 \text{ cm}}$$

$$\boxed{a_{max} = 5g = 49 \text{ m/s}^2}$$

f) De acuerdo con las expresiones obtenidas en el apartado c) y teniendo en cuenta los datos numéricos, la represtación gráfica de *a*/*g* en función de *y* es la siguiente:



P2.- La misión Planck Surveyor

Planck Surveyor es la tercera misión del programa científico Horizon 2000 de la Agencia Espacial Europea. Dicho programa tiene por objeto detectar las anisotropías en el fondo cósmico de microondas en todo el cielo, con una resolución y sensibilidad sin precedentes. El satélite Planck será una fuente valiosísima de datos, con los que se intentarán comprobar las teorías actuales sobre el universo primitivo y los orígenes de las estructuras cósmicas. Este satélite fue lanzado desde la Guayana Francesa el 14 de mayo de 2009, impulsado por un cohete Ariane 5, y aun no ha llegado a su lejana órbita de destino.

El satélite describirá una órbita prácticamente circular en torno al Sol, con la particularidad de que, en todo momento, dicho satélite, la Tierra y el Sol estarán alineados, lo que implica que la velocidad angular de rotación del satélite en torno al Sol, ω, debe ser igual a la de la Tierra. Esta última característica (misma ω que la Tierra) es precisamente la que define los llamados puntos de Lagrange del sistema Sol - Tierra. Puede demostrarse que existen cinco de estos puntos (llamados L1 a L5). En particular, el satélite Planck se situará en el punto L2, que está alineado con el Sol y la Tierra, como se muestra en la figura 1. A este punto no llega nunca radiación directa del Sol, permanentemente eclipsado por la Tierra.

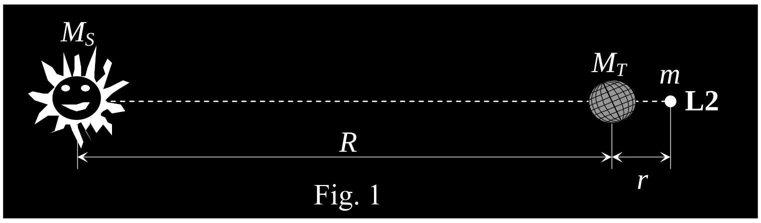


Fig. 1

a) Supuesto que la órbita de la Tierra en torno al Sol es circular, determina la velocidad angular de rotación ω en función de la constante de gravitación, G, la masa del Sol, M_S, y el radio de la órbita, R.

b) El satélite Planck, que está sometido a las atracciones gravitatorias del Sol y de la Tierra[1], debe describir una órbita con la misma ω que la Tierra, pero con un radio mayor, $R + r$, donde r es la distancia de la Tierra al punto L2. Teniendo esto en cuenta, obtén la ecuación que deben cumplir R, r, M_S y M_T (masa de la Tierra). Expresa esta ecuación en función de los cocientes M_T / M_S y r / R.

c) En la práctica, $r << R$ y $M_T << M_S$, lo que permite hacer aproximaciones en la ecuación del apartado anterior. Comprueba que puede reducirse a

$$r \approx R\left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3}$$

Nota: Para realizar aproximaciones, puede resultarte útil saber que

$$|\varepsilon| << 1 \quad \rightarrow \quad (1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$$

d) Calcula el valor de la distancia r empleando los siguientes datos:

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}4 \cdot 10^6$ m

Periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol: $T = 1$ año

e) Como se dice en la introducción, existen cinco puntos de Lagrange. Otro de ellos, el L3, está a una distancia del Sol prácticamente igual al radio R de la órbita de la Tierra. ¿Dónde crees que puede estar este punto? La distancia entre L3 y el Sol, ¿será algo mayor o algo menor que R? Razona tus respuestas.

[1] Considera despreciables las interacciones gravitatorias con la Luna y con otros planetas del sistema solar.

Solución P2.- La misión Planck Suveyor

a) Como la Tierra describe una órbita casi circular de radio R en torno al Sol, con velocidad angular constante[1] ω, se verifica

$$G\frac{M_S M_T}{R^2} = M_T\,\omega^2 R \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega^2 = G\frac{M_S}{R^3}} \tag{1}$$

b) El satélite, de masa *m*, describe una órbita casi circular en torno al Sol de radio $R+r$, siendo su velocidad angular igual a la del apartado anterior, pues se encuentra en uno de los puntos de Lagrange. Por tanto, la atracción gravitatoria conjunta del Sol y de la Tierra debe ser la correspondiente fuerza centripeta[1]

$$G\frac{m M_S}{(R+r)^2} + G\frac{m M_T}{r^2} = m\,\omega^2 (R+r)$$

Teniendo en cuenta (1)

$$G\frac{m M_S}{(R+r)^2} + G\frac{m M_T}{r^2} = mG\frac{M_S}{R^3}(R+r)$$

Simplificando

$$\frac{1}{(R+r)^2} + \frac{M_T}{M_S}\frac{1}{r^2} = \frac{R+r}{R^3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{R^3}{(R+r)^3} + \frac{M_T}{M_S}\frac{R^3}{r^2(R+r)} = 1$$

Se pide la expresión en función de M_T / M_S y r / R. Para ello basta con sacar la *R* como factor común en los dos denominadores, simplificar y reordenar

$$\frac{R^3}{R^3\left(1+\frac{r}{R}\right)^3} + \frac{M_T}{M_S}\frac{R^3}{r^2 R\left(1+\frac{r}{R}\right)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{1}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^3} + \frac{M_T}{M_S}\frac{1}{\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(1+\frac{r}{R}\right)} = 1} \tag{2}$$

c) Dado que $r << R$, el cociente r/R es mucho menor que la unidad. Empleando la aproximación sugerida en el enunciado se puede escribir

$$\frac{1}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^3} = \left(1+\frac{r}{R}\right)^{-3} \approx 1 - 3\frac{r}{R} \quad , \qquad \frac{1}{\left(1+\frac{r}{R}\right)} = \left(1+\frac{r}{R}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{r}{R}$$

Sustituyendo en (2) y simplificando se obtiene

$$\frac{M_T}{M_S}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \left(1-\frac{r}{R}\right) \approx 3$$

Por último, despreciando *r*/*R* frente a 1, queda

$$\frac{M_T}{M_S}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \approx 3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r \approx R\left(\frac{M_T}{3M_S}\right)^{1/3}} \tag{3}$$

---

[1] Téngase en cuenta que, por ser la velocidad angular constante, la aceleración tangencial es nula.

d) Para calcular r aplicando (3) con los datos que nos da el enunciado, hay que expresar el cociente entre las masas en función de dichos datos.

La aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra es

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \qquad (4)$$

Dividiendo (1) y (4) se obtiene

$$\frac{M_T}{M_S} = \frac{g\,R_T^2}{\omega^2 R^3}$$

Sustituyendo en (3) resulta

$$r = \left(\frac{g\,R_T^2}{3\omega^2}\right)^{1/3} \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow \qquad r = \left(\frac{g\,R_T^2}{12\pi^2}T^2\right)^{1/3}$$

Siendo T el periodo de revolución de la Tierra en torno al Sol: T = un año = $3{,}16\cdot 10^7$ s.

Con los datos numéricos del problema se obtiene

$$\boxed{r = 1{,}5\cdot 10^6 \text{ km}}$$

e) Se indica en el enunciado que el punto L3 está a una distancia del Sol prácticamente igual al radio R de la órbita de la Tierra en torno al Sol. Además, un satélite puesto en un punto de Lagrange debería girar en torno al Sol con la misma velocidad angular ω que la Tierra, de forma que cumpliría aproximadamente la ecuación (1) para su órbita en torno al Sol, con los mismos datos que la Tierra. Para ello, el satélite debería estar sometido casi exclusivamente a la atracción gravitatoria del Sol, es decir la atracción gravitatoria de la Tierra sobre el satélite debería ser mucho más pequeña que la del Sol. Por tanto, un claro candidato para el punto L3 es el punto diametralmente opuesto a la Tierra que se muestra en la figura 2.

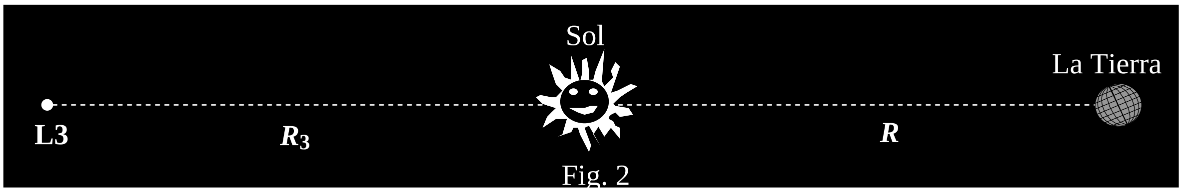


Fig. 2

Este punto L3 ha sido muy utilizado por la ciencia-ficción, puesto que un planeta (la *contra-Tierra*) que orbitase en él estaría permanentemente eclipsado por el Sol, y nunca podría ser observado desde la Tierra. Naturalmente, esta perfectamente probada la inexistencia de dicho planeta.

En este punto L3, la atracción gravitatoria de la Tierra, aunque débil, se suma a la del Sol, aumentando la fuerza centrípeta.

$$G\frac{m M_S}{{R_3^2}^2} + G\frac{m M_T}{(R_3 + R)^2} = m\omega^2 R_3$$

Por tanto, como la ω es fija, la distancia R_3 debe ser algo mayor[2] que R.

---

[2] Realmente, L3 está algo más cerca del Sol que la Tierra, debido a que ambos astros orbitan en torno al centro de masas del sistema, que está desplazado del centro del Sol, hacia la Tierra, una distancia mayor que R_3 - R.

Existe otro punto de Lagrange alineado con el Sol y la Tierra, el L1, en el que las atracciones gravitartorias del Sol y de la Tierra llevan sentidos opuestos. Los puntos L4 y L5 no están alineados con estos dos astros, por lo que su tratamiento es más complejo. En la figura 3 se esquematiza la posición de los cinco puntos de Lagrange del sistema Sol – Tierra.

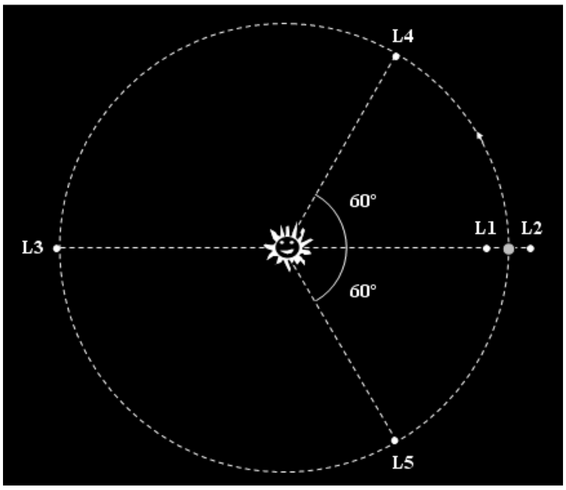


Fig. 3

P3.- Líneas de campo electrostático[1]

Un campo electrostático puede representarse graficamente mediante sus *líneas de fuerza* (o *de campo*). El número de líneas que "nacen" o "mueren" en una carga es proporcional a la magnitud de dicha carga. (La expresión matemática de esta idea constituye el *teorema de Gauss*). El campo eléctrico en cada punto es tangente a la línea de fuerza que pasa por dicho punto, y su intensidad es proporcional a la densidad de líneas (número de líneas por unidad de superficie) que hay en su entorno.

En la figura 1 se muestran las líneas de fuerza que describen el campo electrostático generado por dos cargas puntuales, q_1 y q_2, separadas una distancia d.

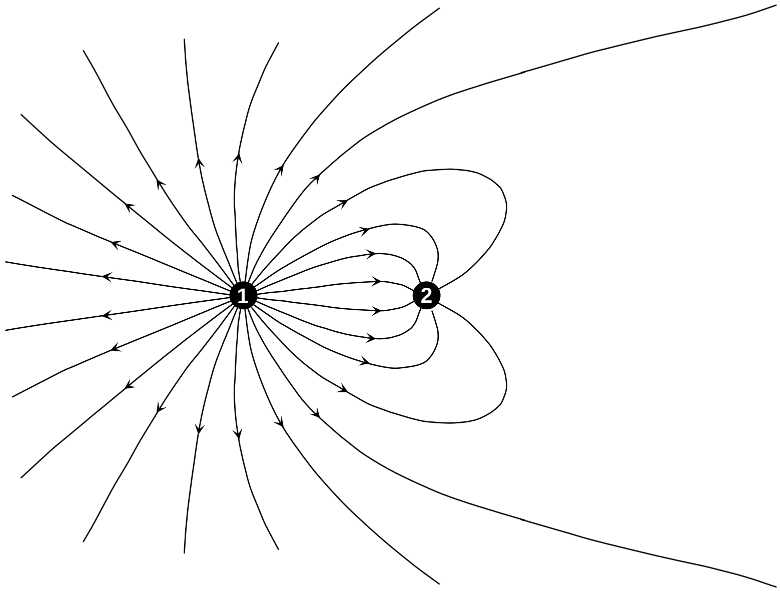


Fig. 1

a) Justifica de qué signo es cada una de las cargas.

b) ¿Cuál es su magnitud relativa, q_1 / q_2?

c) Razona, con la mayor precisión posible, en qué punto o puntos del plano de la figura 1 el campo electrostático $\vec{E}$ creado por ambas cargas es nulo.

d) Determina en qué punto o puntos del plano de dicha figura es nulo el potencial electrostático creado por las dos cargas .

Considera ahora la distribución de cargas puntuales representada en la figura 2, con $Q_1 = 6\ \mu\text{C}$, $Q_2 = -2\ \mu\text{C}$ y $d = 4\ \text{cm}$.

e) Calcula el potencial electrostático, V, y el campo eléctrico, $\vec{E}$, en el punto A de la figura, situado a 3 cm de Q_1 y a 1 cm de Q_2.

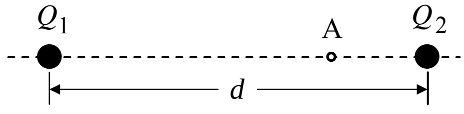


Fig. 2

f) Dibuja las líneas de fuerza para esta distribución de cargas.

Dato: $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ \text{N m}^2/\text{C}^2$

[1] Este problema está inspirado en uno de los propuestos en la II OIbF de Oaxtepec (México) en 1997.

Solución P3.- Líneas de campo electrostático

a) Las líneas de campo "nacen" en las cargas positivas (o en el infinito) y "mueren" en las cargas negativas (o en el infinito). A la vista de la figura 1, deducimos que la carga q_1 es positiva y la q_2 negativa.

b) El número de líneas de campo que nacen o mueren en una carga es proporcional a la magnitud de dicha carga. En la figura 1, vemos que salen 24 líneas de q_1 y llegan 8 a q_2. Por tanto

$$\boxed{\frac{q_1}{q_2} = -3} \qquad (1)$$

c) Para que el campo total $\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ creado por ambas cargas sea nulo debe de cumplirse que, o bien $E_1 = E_2 = 0$, lo que ocurre en puntos infinitamente alejados de las cargas, o bien $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2$. En este último caso ambos vectores tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos. Por tanto, como $q_1 > |q_2|$, $\vec{E}$ sólo puede anularse en un punto como el P de la figura 3, alineado con las cargas y más lejano de 1 que de 2. La igualdad de módulos de los dos campos exige que

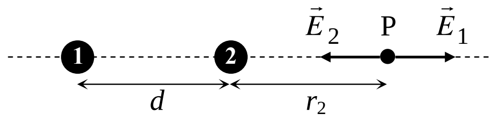


Fig. 3

$$K\frac{q_1}{r_1^2} = K\frac{|q_2|}{r_2^2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{3}{(d+r_2)^2} = \frac{1}{r_2^2}$$

Operando, se obtiene que la distancia r_2 entre q_2 y P es

$$\boxed{r_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}d = 1{,}366\,d}$$

d) Para que el potencial total $V_t = V_1 + V_2$ creado por ambas sea nulo debe de cumplirse que, o bien $V_1 = V_2 = 0$, lo que ocurre en puntos infinitamente alejados de las cargas, o bien $V_1 = -V_2$.

Teniendo en cuenta (1) y con la notación de la figura 4, para que el potencial en el punto P(x, y) sea nulo se debe cumplir que

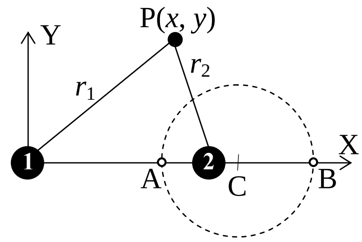


Fig. 4

$$K\frac{q_1}{r_1} = K\frac{|q_2|}{r_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando se llega a la expresión

$$\left(x - \frac{9}{8}d\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3d}{8}\right)^2$$

que es la ecuación de una circunferencia con centro $C\left(\frac{9d}{8}, 0\right)$ y radio $R = \frac{3d}{8}$.

En particular, hay dos puntos alineados con las cargas en los que el potencial es nulo (puntos A y B en la figura 4), situados respecto a q_1 en

$$x_A = \frac{9d}{8} - \frac{3d}{8} = \frac{3d}{4} \qquad \text{y} \qquad x_B = \frac{9d}{8} + \frac{3d}{8} = \frac{3d}{2}$$

e) Nótese que, con los datos numéricos de este apartado, $Q_1 / Q_2 = -3$, de forma que seguimos con la misma distribución electrostática de los apartados anteriores. En particular, el punto A indicado en el enunciado está situado a una distancia $x_A = 3\text{cm} = 3d/4$ de Q_1, en el que acabamos de ver que el potencial es nulo. Esto puede comprobarse numéricamente de forma inmediata

$$V_t = V_1 + V_2 = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{6 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-2}} + \frac{-2 \cdot 10^{-6}}{10^{-2}} \right) = 0$$

El campo electrostático creado por las dos cargas en A es

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

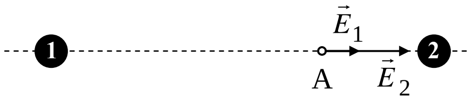


Fig. 5

Los vectores $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección y sentido por lo que $\vec{E}_t$ se dirige de la carga positiva hacia la negativa (ver figura 5). Su módulo es

$$E_t = E_1 + E_2 = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-4}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{10^{-4}} \right) = 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ N/C}$$

f) Las líneas de fuerza creadas por estas dos cargas puntuales son las de la figura 1 del enunciado.