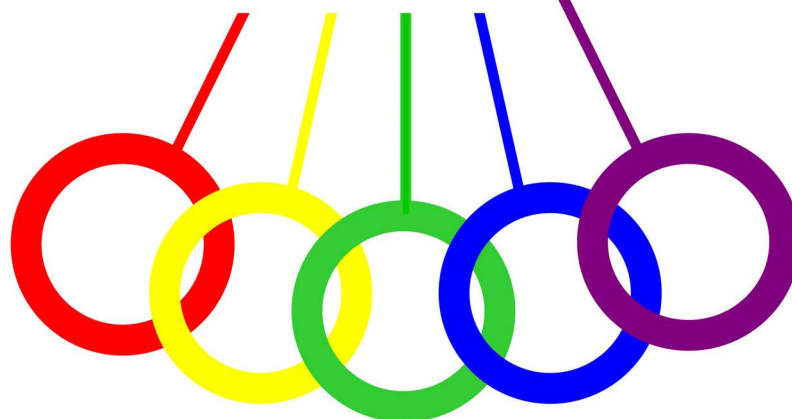


27 Olimpiada

*ESPAÑOLA DE
FÍSICA*

FASE DE ARAGÓN



1ª PRUEBA

26 de febrero de 2016

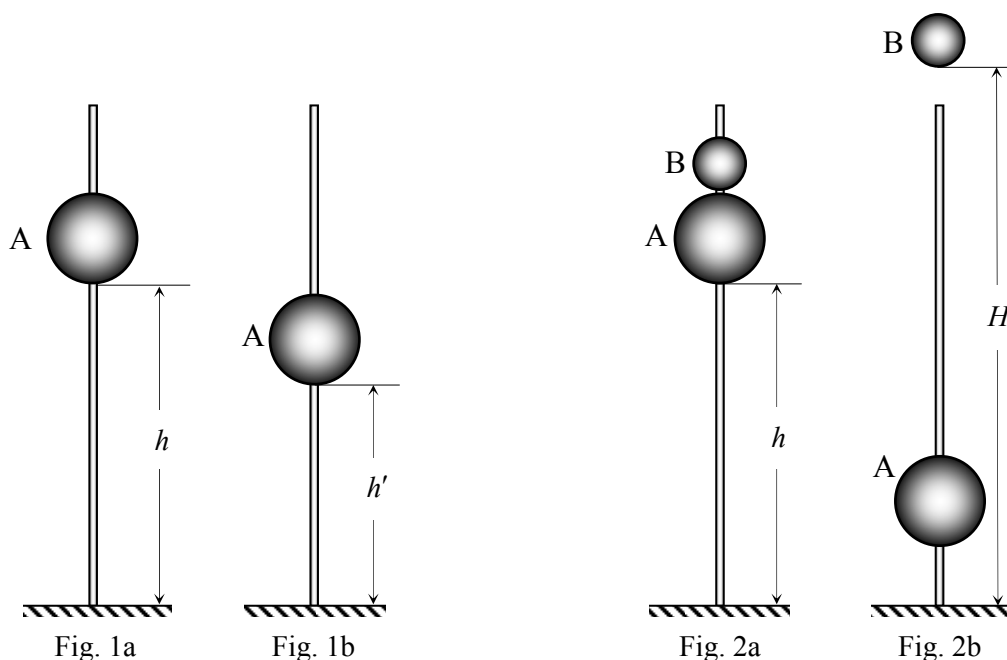
P1.- Un espectacular juguete: el *astroblaster*.

El “astroblaster” es un pequeño juguete consistente en varias bolas ensartadas en un vástago, como se muestra en la fotografía de la derecha. Cuando el dispositivo se deja caer desde una pequeña altura y choca con el suelo, la bola pequeña sale disparada hacia arriba y asciende hasta una gran altura, muy superior a la inicial. Es un bonito ejemplo de transferencia de energía y momento lineal, que tiene lugar en los sucesivos choques ¡no simultáneos! entre las bolas.



En este ejercicio se trabajará con un modelo simplificado de astroblaster, con sólo dos bolas para evitar cálculos repetitivos, y haciendo énfasis en la no simultaneidad de los choques.

En primer lugar, considera una bola A ensartada en un alambre rígido muy largo, que se deja caer al suelo desde una altura h , como se indica en la figura 1a. Cuando la bola choca con el suelo, rebota y asciende hasta una altura $h' = 3h/4$, como se muestra en la figura 1b. Se supone que no existe rozamiento entre la bola y el alambre y que la resistencia del aire es despreciable.



- a₁) Determina en función de h la velocidad de la bola A inmediatamente antes de chocar con el suelo, v_0 , y justo después de rebotar, v_A .

Se define el *coeficiente de restitución* de un choque entre dos cuerpos, e , como el cociente de los módulos de las velocidades relativas (de un cuerpo respecto al otro) después y antes de la colisión, $e = v_{r,f} / v_{r,i}$. En el caso que estamos considerando, como el suelo no se mueve, se cumple simplemente $e = v_A / v_0$.

- a₂) Calcula el valor del *coeficiente de restitución* del choque de A con el suelo.

Ahora volvemos a repetir el proceso, pero dejando caer desde la altura h y al mismo tiempo la bola A y otra más pequeña B, casi juntas, como se muestra en la figura 2a.

Se van a producir dos choques no simultáneos. En el primero, análogo al del apartado a₁, la bola A llega al suelo con una velocidad v_0 , rebota e inicia la subida con la velocidad v_A . Inmediatamente después se produce el segundo choque: la bola A que se mueve hacia arriba con la velocidad v_A choca con la B que se mueve hacia abajo con una velocidad v_B .

- b₁) ¿Cuál es la velocidad de B antes del choque, v_B ?

En las figuras 3a y 3b se esquematiza la situación justo antes y justo después del choque entre las dos bolas, siendo v'_B y v'_A sus velocidades inmediatamente después del choque

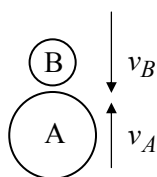


Fig. 3a. Antes del choque

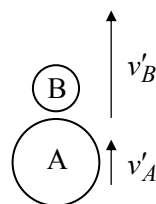


Fig. 3b. Después del choque

- b₂) Escribe la expresión del coeficiente de restitución de este choque, e , en función de los módulos de las velocidades antes y después de la colisión, v_A , v_B , v'_A y v'_B .

Supón que el valor del coeficiente de restitución en esta colisión es el mismo calculado en a₂, y ten en cuenta que se mantiene constante el momento lineal del sistema¹.

Las masas de las bolas son m_A y m_B , con $m_B = m_A / 10$.

- b₃) Determina en función de v_0 la velocidad de la bola B después del choque, v'_B .
- b₄) Determina en función de h la altura máxima, H , que alcanzará la bola B (Figura 2b).

¹ Aunque seguramente no lo has estudiado todavía con detalle, durante el choque sólo actúan las fuerzas de interacción entre las dos bolas (fuerzas *interiores*), por lo que debe conservarse el momento lineal del sistema, $\vec{P}_i = \vec{P}_f$. Es decir, la suma (vectorial) de los momentos lineales de las dos bolas antes del choque debe ser igual a la suma de los momentos lineales después de dicho choque.

P1 Solución

- a₁) Si se desprecian la fricción con el alambre y la resistencia del aire, tanto v_0 como v_A pueden obtenerse directamente a partir de la conservación de la energía mecánica

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh}}$$

$$v_A = \sqrt{2gh'}$$

$$h' = \frac{3h}{4} \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{\frac{3gh}{2}}}$$

- a₂) Tal y como se indica en el enunciado, el coeficiente de restitución es $e = v_A / v_0$. Por tanto

$$e = \sqrt{\frac{h'}{h}} \Rightarrow \boxed{e = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,87} \quad (1)$$

- b₁) La bola B, igual que la A, ha descendido una altura h en caída libre, luego su velocidad es

$$\boxed{v_B = v_0 = \sqrt{2gh}} \quad (2)$$

- b₂) En la figura 3a se indica que, justo antes del choque entre las bolas, A se mueve hacia arriba y B hacia abajo, de forma que el módulo de la velocidad relativa entre las bolas es $v_{r,i} = v_B + v_A$. Después del choque (figura 3b), las dos bolas se mueven hacia arriba con $v'_B > v'_A$, luego el módulo de la velocidad relativa es $v_{r,f} = v'_B - v'_A$. En total

$$\boxed{e = \frac{v'_B - v'_A}{v_B + v_A}} \quad (3)$$

- b₃) Tomando sentido positivo hacia arriba, la conservación del momento lineal se escribe

$$m_A v_A - m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que $v_B = v_0$ y que $v_A = ev_0$, las ecuaciones (3) y (4) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, v'_B y v'_A . Resolviendo el sistema se obtiene

$$v'_B = \frac{e(2+e)m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0$$

Para $m_A = 10m_B$, y teniendo en cuenta el valor de e dado en (1), se obtiene

$$\boxed{v'_B = 2,17 v_0} \quad (5)$$

- b₄) Aplicando de nuevo la conservación de la energía mecánica, y teniendo en cuenta (5)

$$v'_B = \sqrt{2gH}$$

$$v'_B = 2,17 v_0 = 2,17 \sqrt{2gh}$$

Operando, se obtiene por fin

$$\boxed{H = 4,7 h}$$

Nota: La altura H calculada no es hasta el suelo, como por error se indica en la figura 2b, sino hasta el vértice superior de la bola A en el instante del choque (figura 2b'). La altura hasta el suelo sería H más el diámetro (desconocido) de la bola A.

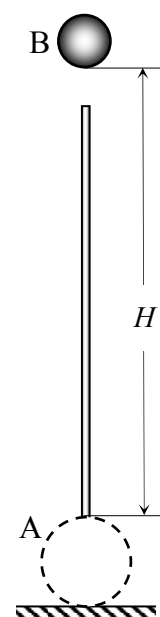


Fig. 2b'

P2.- Oscilaciones de una esfera cargada.

Dos pequeñas esferas están sujetas en los extremos de una varilla fija no conductora de longitud $2d$. Una tercera esfera, de masa m , está ensartada en la varilla y puede deslizar sin rozamiento por ella. Las tres esferas son no conductoras y cada una tiene una carga eléctrica q uniformemente distribuida sobre su superficie.

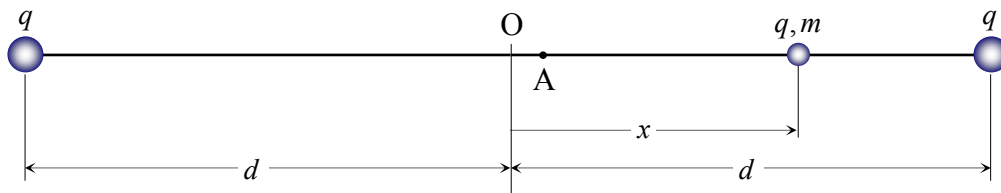


Fig. 1

- Determina la expresión de la fuerza electrostática, $F(x)$, que actúa sobre la esfera central cuando está a una distancia x del centro de la varilla, O , como se indica en la figura 1.
- Obtén una expresión aproximada de $F(x)$ para $x \ll d$.
- La esfera se libera con velocidad inicial nula desde un punto A , situado a una distancia $x_A = d/20$ a la derecha de O . ¿Cuál será su velocidad, v_0 , cuando pase por O ?
- La esfera seguirá moviéndose hacia la izquierda, después de pasar por O . ¿Cuál es la coordenada, x_B , del punto B más alejado de O hasta el que llegará?
- Teniendo en cuenta la expresión aproximada de $F(x)$ que has obtenido en el apartado b), calcula el tiempo que tardará la esfera en realizar el trayecto AB .

P2 Solución

- a) La fuerza neta es la suma (vectorial) de las repulsiones electrostáticas de las dos cargas situadas en los extremos de la varilla. Tomando sentido positivo hacia la derecha

$$F = k \frac{q^2}{(d+x)^2} - k \frac{q^2}{(d-x)^2} \Rightarrow F = -\frac{4kq^2 d \cdot x}{(d-x)^2 (d+x)^2}$$

- b) Si $x \ll d$, despreciando x frente a d en el denominador de la expresión anterior, la fuerza se reduce a

$$F \approx -\frac{4kq^2 x}{d^3}$$

Se obtiene una fuerza que, aproximadamente, es directamente proporcional al desplazamiento x y en sentido opuesto (fuerza tipo “muelle”), por lo que si la carga se aparta ligeramente de O y se libera realizará oscilaciones aproximadamente armónicas, con frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{4kq^2}{md^3}} = 2q \sqrt{\frac{k}{md^3}} \quad (1)$$

- c) La fuerza eléctrica que actúa sobre la carga q es conservativa. Planteando la conservación de la energía mecánica entre A y O se tiene

$$k \frac{q^2}{21d/20} + k \frac{q^2}{19d/20} = 2k \frac{q^2}{d} + \frac{1}{2} m v_0^2$$

Operando se obtiene

$$v_0 = \sqrt{\frac{4}{399} k \frac{q^2}{md}} \approx \frac{q}{10} \sqrt{\frac{k}{md}}$$

A este último resultado aproximado también puede llegarse teniendo en cuenta las conclusiones del apartado b). En una oscilación armónica, la velocidad al pasar por O (velocidad máxima) es $A\omega$, donde A es la amplitud de la oscilación, es decir

$$v \approx \frac{d}{20} \omega = \frac{d}{20} 2q \sqrt{\frac{k}{md^3}} = \frac{q}{10} \sqrt{\frac{k}{md}}$$

- d) Evidentemente, la carga se moverá hasta la posición simétrica de la inicial, donde la energía cinética es nula y la potencial coincide con la inicial, es decir

$$x_B = -x_A = -\frac{d}{20}$$

- e) Como ya se ha comentado, si $x \ll d$ la ecuación de movimiento es la correspondiente a un oscilador armónico

$$F \approx -\frac{4kq^2 x}{d^3} = ma \rightarrow a = -\frac{4kq^2}{md^3} x = -\omega^2 x$$

La frecuencia angular de oscilación será la dada en (1), y el tiempo que tardará la partícula en ir de A hasta B será medio periodo

$$t_{A,B} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \rightarrow t_{A,B} = \frac{\pi}{2q} \sqrt{\frac{md^3}{k}}$$

P3.- El efecto invernadero.

Algunos gases presentes en la atmósfera como el vapor de agua, CO_2 , CH_4 y NO_x se denominan “gases de efecto invernadero”. Estos gases absorben y reemiten hacia la corteza terrestre gran parte de la radiación infrarroja emitida por la Tierra, logrando un equilibrio que hace posible que la superficie de este planeta se mantenga a una temperatura media compatible con la vida. Pero un aumento antropogénico de la concentración de dichos gases puede producir un aumento en la temperatura de la Tierra de funestas consecuencias. El objetivo de una serie de reuniones internacionales sobre *cambio climático* –la última en París a finales de 2015– es precisamente reducir la emisión de gases de efecto invernadero.

En este ejercicio se plantean algunos aspectos relacionados con la radiación solar, y en el último apartado se presenta un tratamiento básico del efecto invernadero.

La capa alta de la atmósfera terrestre recibe una radiación solar cuya intensidad (potencia por unidad de superficie) es $S_T = 1,37 \times 10^3 \text{ W/m}^2$. La distancia entre el Sol y la Tierra es $R_{ST} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$

- 1) Determina y calcula la potencia total con que emite el Sol, W_S .

La velocidad de la luz en el vacío es $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$.

- 2) Calcula la masa que pierde el Sol por unidad de tiempo, $\Delta m / \Delta t$, para generar tal cantidad de energía.

El radio del Sol es $R_S = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$.

- 3) Determina y calcula la potencia por unidad de superficie, S_S , que emite el Sol en su superficie.

La ley de Stefan-Boltzmann relaciona la potencia por unidad de superficie emitida por un *cuerpo negro* con su temperatura absoluta, T . Su expresión es: $S = \sigma T^4$, en la que $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ (Constante de Stefan-Boltzmann). Considera que la radiación solar cumple esta ley, es decir que el Sol se comporta como un cuerpo negro.

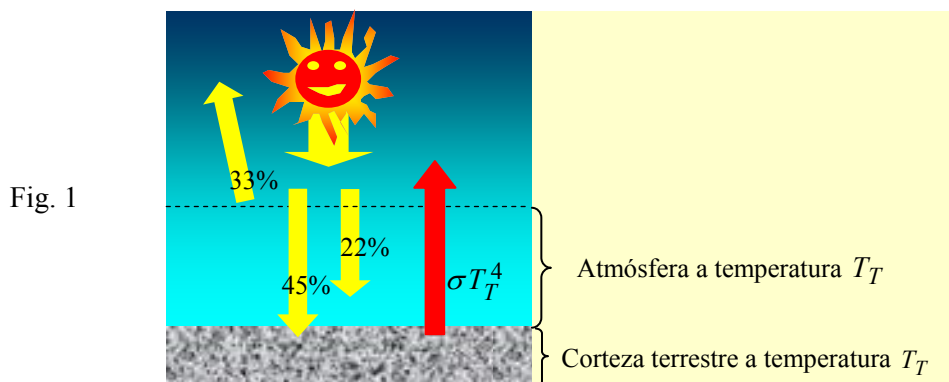
- 4) ¿Cuál es la temperatura en la superficie del Sol, T_S ?

Desde el Sol, la Tierra se ve como un disco de área $A = \pi R_T^2$, donde $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$ es el radio de la Tierra. Esta área es la *sección eficaz* de la Tierra para la radiación solar.

- 5) Determina y calcula la potencia solar que recibe la Tierra, W_T .

Como se esquematiza en la figura 1, un 33% de la energía solar que llega a la Tierra se refleja, un 22% se absorbe en la atmósfera y el 45% restante se absorbe en la corteza terrestre. Vamos a considerar en principio que, una vez alcanzado un estado estacionario en el que se equilibran ganancias y pérdidas energéticas, la corteza terrestre y la atmósfera están a la misma temperatura media (promedio entre día y noche), T_T .

Admite en adelante que el espesor de la atmósfera es despreciable frente al radio de la Tierra.



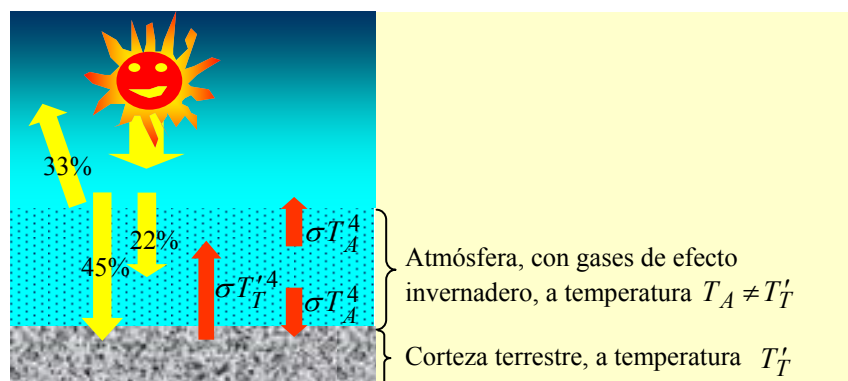
- 6) Determina y calcula la temperatura de equilibrio del sistema corteza-atmósfera, T_T , considerando al conjunto como un único cuerpo negro.

En el planteamiento del apartado anterior no se ha tenido en cuenta el efecto invernadero, y por eso la temperatura T_T que se obtiene es apreciablemente inferior a la temperatura media real de la Tierra, T'_T .

La radiación que emite la Tierra está en el rango del infrarrojo, y precisamente la atmósfera absorbe esta radiación con gran eficacia debido a los gases de efecto invernadero que contiene (CO_2 , NO_x , etc.).

Como modelo más elaborado, consideremos ahora una situación de equilibrio en la que toda la radiación infrarroja que emite la corteza terrestre, a una temperatura T'_T , es completamente absorbida por la atmósfera, a una temperatura T_A . Por otra parte, la atmósfera emite por igual en todas las direcciones, de manera que emite la misma radiación hacia el espacio exterior que hacia la corteza, como se esquematiza en la figura 2.

Fig. 2



- 7) Determina y calcula la temperatura de equilibrio en la corteza terrestre, T'_T , suponiendo que tanto la corteza como la atmósfera se comportan como cuerpos negros.

P3 Solución

- 1) Si la distancia entre el Sol y la Tierra es R_{ST} y la potencia que recibe la Tierra por unidad de superficie es S_T , la energía total que emite el Sol es

$$W_S = 4\pi R_{ST}^2 S_T = 3,9 \times 10^{26} \text{ W}$$

- 2) De acuerdo con la muy conocida expresión de Einstein, una masa Δm de Sol equivale a una energía ΔE dada por

$$\Delta E = \Delta m c^2$$

Por tanto, la energía por unidad de tiempo (potencia) que genera el Sol, $W_S = \Delta E / \Delta t$, supone una pérdida de masa por unidad de tiempo

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{1}{c^2} \frac{\Delta E}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{W_S}{c^2} = 4,3 \times 10^9 \text{ kg/s}$$

- 3) Si R_S es el radio del Sol, la potencia por unidad de superficie que emite en su superficie es

$$S_S = \frac{W_S}{4\pi R_S^2} = 6,3 \times 10^7 \text{ W/m}^2$$

- 4) Si el Sol se considera como un cuerpo negro a temperatura T_S , en virtud de la ley de Stefan-Boltzmann, se tiene

$$T_S = \left(\frac{S_S}{\sigma} \right)^{1/4} = 5,8 \times 10^3 \text{ K}$$

- 5) La energía que transporta la radiación solar incide en la Tierra a través de su sección eficaz, $A = \pi R_T^2$, por lo que la potencia que llega a la tierra es

$$W_T = \pi R_T^2 S_T \quad (1)$$

$$W_T = 1,7 \times 10^{17} \text{ W}$$

- 6) De la energía solar que llega a la Tierra, el 33% se refleja. El 67% restante se absorbe en la atmósfera o en la corteza terrestre. Si ambas, Tierra y atmósfera, están en equilibrio térmico a una temperatura T_T , y suponiendo que el conjunto se comporta como un único cuerpo negro, la energía que emite por unidad de tiempo tiene que ser igual a la que recibe, $0,67 W_T$. Es decir,

$$4\pi R_T^2 \sigma T_T^4 = 0,67 \pi R_T^2 S_T$$

De donde

$$T_T = \left(\frac{0,67 S_T}{4\sigma} \right)^{1/4} \quad (2)$$

$$T_T = 252 \text{ K}$$

- 7) La temperatura obtenida en el apartado anterior ($-21\text{ }^{\circ}\text{C}$) es, sin duda, demasiado fresquita. Para obtener un resultado más realista es preciso mejorar el modelo, teniendo en cuenta los gases de efecto invernadero contenidos en la atmósfera, que supondremos a una temperatura T_A . La atmósfera, considerada como un cuerpo negro, emite la energía que recibe del Sol y de la corteza de forma isótropa, y por tanto una parte se escapará al espacio y otra igual irá a parar a la corteza terrestre. Suponiendo también que la corteza es un cuerpo negro a temperatura T'_T , se pueden hacer los siguientes balances:

$$\text{La corteza terrestre: } \begin{cases} \text{Recibe } 0,45W_T + 4\pi R_T^2 \sigma T_A^4 \\ \text{Emite: } 4\pi R_T^2 \sigma T'^4_T \end{cases}$$

En estado de equilibrio

$$0,45W_T + 4\pi R_T^2 \sigma T_A^4 = 4\pi R_T^2 \sigma T'^4_T$$

Teniendo en cuenta (1) y simplificando

$$0,45S_T + 4\sigma T_A^4 = 4\sigma T'^4_T \quad (3)$$

En cuanto a la atmósfera, el balance energético es

$$\text{La atmosfera: } \begin{cases} \text{Recibe } 0,22W_T + 4\pi R_T^2 \sigma T'^4_T \\ \text{Emite: } 2(4\pi R_T^2 \sigma T_A^4) \end{cases}$$

Por lo que

$$0,22\pi R_T^2 S_T + 4\pi R_T^2 \sigma T'^4_T = 2(4\pi R_T^2 \sigma T_A^4)$$

$$T_A^4 = \frac{0,22S_T}{8\sigma} + \frac{T'^4_T}{2} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3) y simplificando se obtiene

$$T'^4_T = \frac{0,28S_T}{\sigma}$$

Teniendo en cuenta (2), queda finalmente

$$T'^4_T = 1,67T_T^4$$

$$T'_T = 1,14T_T = 286\text{ K}$$

Esta nueva temperatura es más confortable... y acorde con la realidad.