Real Sociedad Española de Física
R.S.E.F.

CIENCIAS ZARAGOZA

Universidad de Zaragoza

XX Olimpiada Española de Física

Fase de Aragón

SEGUNDA PRUEBA

27 de febrero de 2009

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de un problema de tipo experimental

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

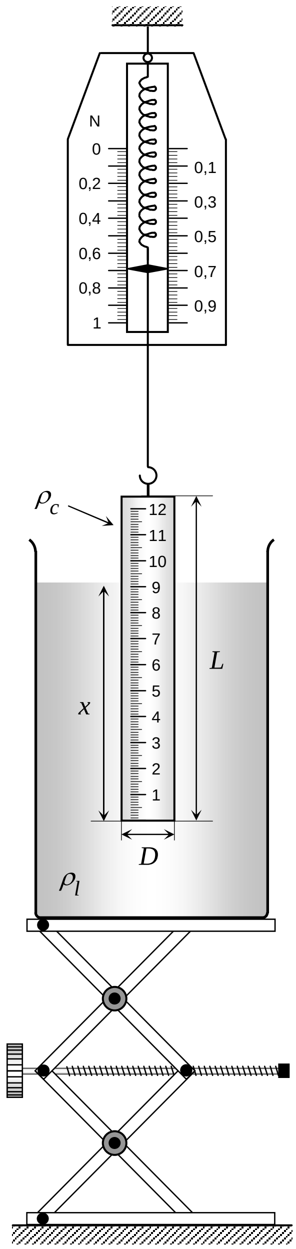
cofis Colegio Oficial de Físicos

iberCaja Obra Social

Subvenciona:

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

Problema Experimental. ***Densidades y principio de Arquímedes***



El famoso principio de Arquímedes suele expresarse en la forma:

"*Todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascensional (empuje) igual al peso del fluido desalojado*".

Por tanto, el empuje experimentado por el cuerpo depende de la densidad del fluido, de forma que unas medidas experimentales adecuadas permiten obtener dicha densidad.

Un método sencillo y directo para determinar la densidad de un líquido, ρ_l, sería el siguiente: con un dinamómetro (por ejemplo) se mide el peso de un objeto, w. A continuación se repite la medida, pero con el cuerpo completamente sumergido en el líquido, obteniéndose un "peso aparente" inferior w_a. La diferencia entre estas dos medidas es el empuje E del líquido.

$$w_a = w - E = w - \rho_l V g \qquad \rightarrow \qquad \rho_l = \frac{w - w_a}{Vg}$$

donde V es el volumen del líquido desalojado por el objeto, y $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ es la aceleración de la gravedad.

Para mejorar la precisión del resultado final es conveniente realizar varias medidas del peso aparente, con el objeto parcial y progresivamente sumergido. En esta prueba experimental se plantea un problema de este tipo.

Imagina que en el laboratorio se dispone del siguiente material:

- Dinamómetro de carga máxima 1 N y resolución 0,01 N.
- Cilindro metálico de densidad desconocida, con una regla impresa en su superficie lateral, graduada en mm.
- Vaso con el líquido problema.
- Gato mecánico para variar la altura del vaso.

Con estos elementos es posible medir el peso aparente del cuerpo cilíndrico para diversas longitudes sumergidas, x, empleando el montaje de la figura. En la tabla siguiente se presentan los pesos aparentes medidos, w_a.

x (cm)	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
w_a (N)	1,00	0,97	0,93	0,88	0,84	0,81	0,77	0,72	0,69	0,66	0,61	0,58

El peso w del cilindro es superior a 1 N, por lo que no se puede medir con el dinamómetro.

Con un calibre de 0,1 mm de resolución se miden las dimensiones del cuerpo cilíndrico:

Longitud, $L = 12{,}50$ cm.
Diámetro, $D = 2{,}00$ cm.

a) Representa en el papel milimetrado los puntos experimentales (x, w_a) y ajústalos a una línea recta.

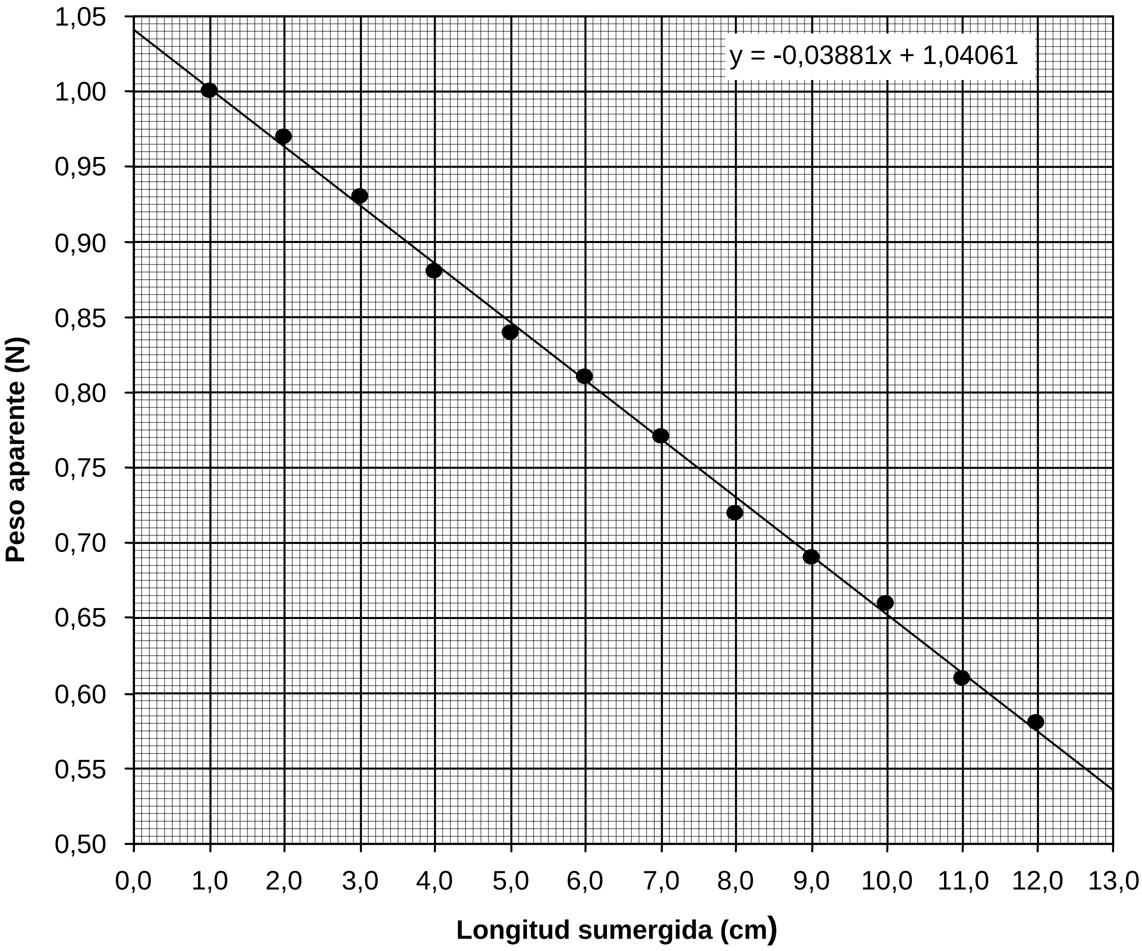
b) Determina la densidades del líquido, ρ_l, y del cilindro, ρ_c.

c) Suponiendo que la incertidumbre (margen de error) de D es la principal fuente de error con este método de medida, haz una estimación de la incertidumbre de ρ_l.

Problema experimental. ***Densidades y principio de Arquímedes***

Solución

a) En la siguiente figura se presenta la gráfica pedida, con un aspecto similar al que tendría dibujada en papel milimetrado.



En la misma gráfica se ha trazado la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales. La pendiente y la ordenada en el origen de esta recta pueden determinarse con buena precisión tomando dos puntos alejados sobre la recta, por ejemplo los dos puntos extremos

$$(x_1\,;\,y_1) = (0{,}0 \text{ cm}; 1{,}041 \text{ N}), \quad (x_2\,;\,y_2) = (13{,}0 \text{ cm}; 0{,}537 \text{ N})$$

Por tanto, la pendiente de la recta, p, es

$$p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -3{,}877 \cdot 10^{-2} \text{ N/cm} = -3{,}877 \text{ N/m}$$

y su ordenada en el origen, c, es

$$c = y_1 = 1{,}041 \text{ N}$$

Nota: un ajuste por el método analítico de "mínimos cuadrados" conduce a $p = -3{,}881$ N/m , $c = 1{,}041$ N .

b) Según se indica en el enunciado, el peso aparente del cilindro es

$$w_a = w - E = w - \rho_l V g$$

donde V es el volumen sumergido. En nuestro problema, para una longitud sumergida x,

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 x$$

En total, la dependencia esperada entre w_a y x es

$$w_a = w - \frac{\rho_l \pi\, g\, D^2}{4} x$$

que es una recta con ordenada en el origen igual al peso w del cilindro y pendiente

$$p = -\frac{\rho_l \pi\, g\, D^2}{4}$$

Comparando con los resultados del ajuste a una línea recta se obtienen las dos densidades buscadas:

$$\rho_l = -\frac{4p}{\pi\, g\, D^2} = 1{,}259 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \tag{1}$$

$$w = \rho_c \pi \frac{D^2}{4} L\, g = y_1 \qquad \rightarrow \qquad \rho_c = \frac{4 y_1}{\pi\, g\, D^2 L} = 2{,}705 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

c) La resolución del calibre con el que se ha medido D es 0,1 mm. Por tanto la incertidumbre de D es[1]

$$\Delta D = 0{,}05 \text{ mm}$$

En consecuencia, se espera que, debido a esta fuente de error, la densidad del líquido esté entre los valores extremos

$$\rho_{l,max} = -\frac{4p}{\pi\, g\, (D - \Delta D)^2} = 1{,}266 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \ , \quad \rho_{l,min} = -\frac{4p}{\pi\, g\, (D + \Delta D)^2} = 1{,}253 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

En total, teniendo únicamente en cuenta como fuente de error la incertidumbre en la medida de D, la incertidumbre de la densidad del líquido sería

$$\Delta\rho_l = \frac{1}{2}\left(\rho_{l,\max} - \rho_{l,\min}\right) = 6 \text{ kg/m}^3 \qquad \rightarrow \qquad \rho_l = (1{,}259 \pm 0{,}006) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

También puede deducirse $\Delta\rho_l$ tomando incrementos, en valor absoluto, en la igualdad (1)

$$\Delta\rho_l = \frac{4p}{\pi\, g} \frac{2\Delta D}{D^3} = \rho_l \frac{2\Delta D}{D} = 6 \text{ kg/m}^3$$

Nota: una estimación más realista de $\Delta\rho_l$ debería tener en cuenta también la incertidumbre de la pendiente de la recta ajustada. Cálculos analíticos que no detallamos aquí conducen a que el *error típico* relativo de esta pendiente[2] es del 1,3%. Como ρ_l es directamente proporcional a esta pendiente, este error relativo se transmite directamente a la densidad y se tiene $\Delta\rho_l = 16 \text{ kg/m}^3$. Por tanto, un resultado más realista para la densidad del líquido sería

$$\rho_l = (1{,}26 \pm 0{,}02) \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

---

[1] Es habitual sobrevalorar esta incertidumbre, haciéndola coincidir con la resolución del aparato, es decir $\Delta D = 0{,}1$ mm.

[2] Podría estimarse este error trazando las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a los puntos experimentales.