Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Real Sociedad Española de Física
R.S.E.F.

Universidad Zaragoza
1542

# 29 Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

## FASE DE ARAGÓN

## 2ª PRUEBA

## 23 de febrero de 2018

cofis Colegio Oficial de Físicos

iberCaja Obra Social

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

# Problema experimental. Bobinas de Helmholtz

**Modelo teórico.**

El campo magnético en el centro O de una bobina de $N$ espiras circulares de radio $R$, delgadas y apretadas, por las que circula una corriente $I$ es

$$B_{\mathrm{O}} = \frac{\mu_0 N I}{2R} \qquad (1)$$

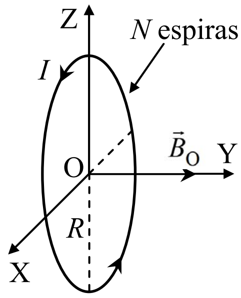


Fig. 1

donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N\,A^{-2}}$ es la permeabilidad del vacío. La dirección y el sentido de este campo se indican en la figura 1, donde por simplicidad se ha dibujado una única espira. Este campo no es uniforme, sino que decrece rápidamente a lo largo del eje de simetría de la espira (OY en la figura 1).

En muchas ocasiones interesa disponer de un campo magnético uniforme en una zona del espacio. Uno de los montajes más empleados para conseguirlo son las llamadas *bobinas de Helmholtz*: se hace circular la misma corriente y en el mismo sentido por dos bobinas iguales y coaxiales situadas en planos paralelos, separados una distancia igual al radio de las espiras (figura 2). Puede demostrarse que con esta configuración geométrica el campo magnético en torno al centro C del sistema es muy uniforme, dentro de una región con dimensiones del orden de $R/2$.

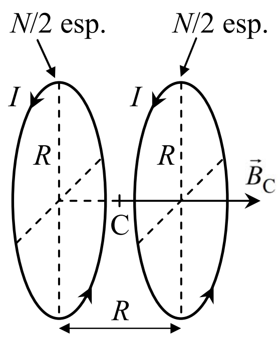


Fig. 2

El campo magnético en C seguirá siendo directamente proporcional al número total $N$ de espiras de las dos bobinas ($N/2$ en cada una) y a la corriente $I$ que circula por ellas. Pero es de esperar que $B_{\mathrm{C}}$ sea inferior al que se tiene en el centro de una única bobina de $N$ espiras, es decir

$$B_{\mathrm{C}} = K B_{\mathrm{O}} \qquad (2)$$

donde $K$ es una constante menor que la unidad. El primer objetivo de esta prueba experimental es determinar el valor de esta constante.

Para medir el campo magnético se puede emplear una brújula formada por un imán cilíndrico colgado mediante un hilo. En equilibrio, el eje de la brújula se orienta en la dirección del campo magnético, y el periodo $T$ de pequeñas oscilaciones torsionales (en el sentido de retorcer el hilo) en torno a dicha dirección depende del módulo del campo, $B$, en la forma

$$\frac{1}{T^2} = \alpha B \qquad (3)$$

donde $\alpha$ es una constante que depende de la "potencia" del imán (de su *momento magnético*) y de la masa y dimensiones del cilindro (de su *momento de inercia*). Para un cierto imán, se ha determinado experimentalmente el valor de esta constante, obteniendo

$$\alpha = (4{,}0 \pm 0{,}1) \times 10^4\ \ \mathrm{T^{-1}s^{-2}} \qquad (4)$$

Las bobinas de Helmholtz se orientan con su eje en la dirección del campo magnético terrestre $B_H$ (componente horizontal), y la brújula se coloca en el centro de las bobinas, de forma que estará sometida a un campo total aproximadamente uniforme

$$B = B_H + B_C = B_H + K \frac{\mu_0 N}{2R} I \qquad (5)$$

Consideraremos el campo $B_H$ como positivo. Pero nótese que el campo $B_C$ de las bobinas puede ser positivo o negativo según sea el signo de $I$, es decir el sentido de la corriente que circula por ellas.

El valor local de $B_H$ será la segunda incógnita del problema.

**Montaje experimental**[1]**.**

En la figura 3 se muestra una fotografía de las bobinas de Helmholtz, construidas sobre unos cilindros de metacrilato cubiertos con cinta adhesiva. El número total de espiras es $N = 20$ (10 espiras en cada bobina). El radio de las espiras es $R = 4{,}50$ cm.

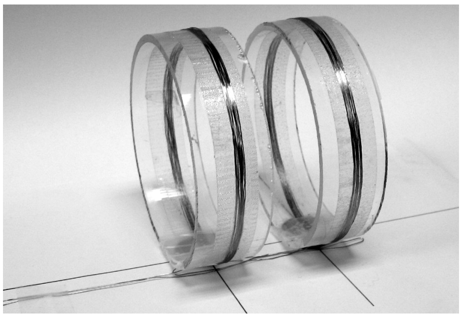


Fig. 3

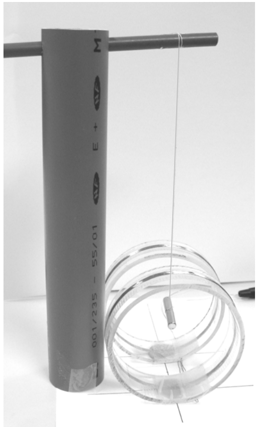


Fig. 4

En la figura 4 se observa la brújula situada en el centro de las bobinas, colgando de un hilo sujeto por una barra y un cilindro de PVC. El sistema está orientado de forma que el eje de la brújula en equilibrio coincide con el eje de las bobinas.

En la figura 5 se muestra una fotografía del montaje completo, incluyendo una pila de alimentación, un potenciómetro para variar la corriente $I$ y un amperímetro para medir dicha corriente. El esquema eléctrico se presenta en la figura 6. El periodo de oscilación torsional de la brújula se mide con un cronómetro manual.

Fig. 5

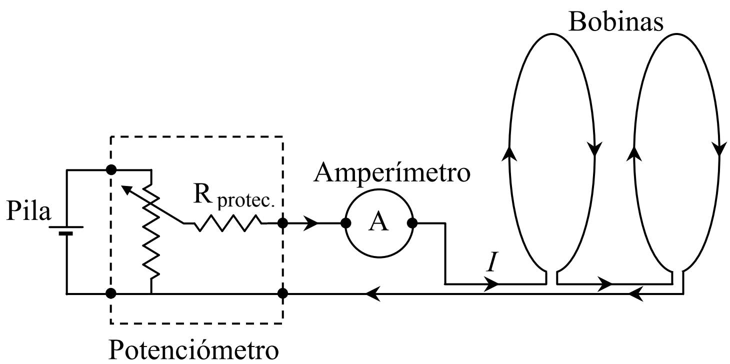



Fig. 6

[1] Esta prueba experimental se realizó en la XXII OEF de Murcia en 2011. Allí, los participantes tuvieron que construir realmente el montaje experimental que a continuación se describe.

**Preguntas.**

En la siguiente tabla se recogen los valores del periodo de oscilación torsional, $T$, medidos a intervalos aproximadamente regulares de la corriente entre $I$ = -80 mA e $I$ = 200 mA. Para mejorar la precisión de $T$, realmente se ha medido el tiempo $t$ de 20 oscilaciones, y calculado $T = t/20$.

| $I$ (mA) | -80,5 | -59,8 | -40,1 | -20,4 | 0,0 | 20,1 | 40,1 | 60,2 | 80,2 | 100,1 | 120,2 | 138,8 | 160,3 | 180,3 | 197,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ (s) | 1,703 | 1,415 | 1,238 | 1,107 | 1,025 | 0,945 | 0,887 | 0,822 | 0,785 | 0,750 | 0,722 | 0,690 | 0,666 | 0,644 | 0,625 |

**a)** Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos $(x,\, y) = (I,\, 1/T^2)$.

**b)** Determina la pendiente, $p$, y la ordenada en el origen, $y_0$, de la recta que mejor se ajusta a estos puntos.

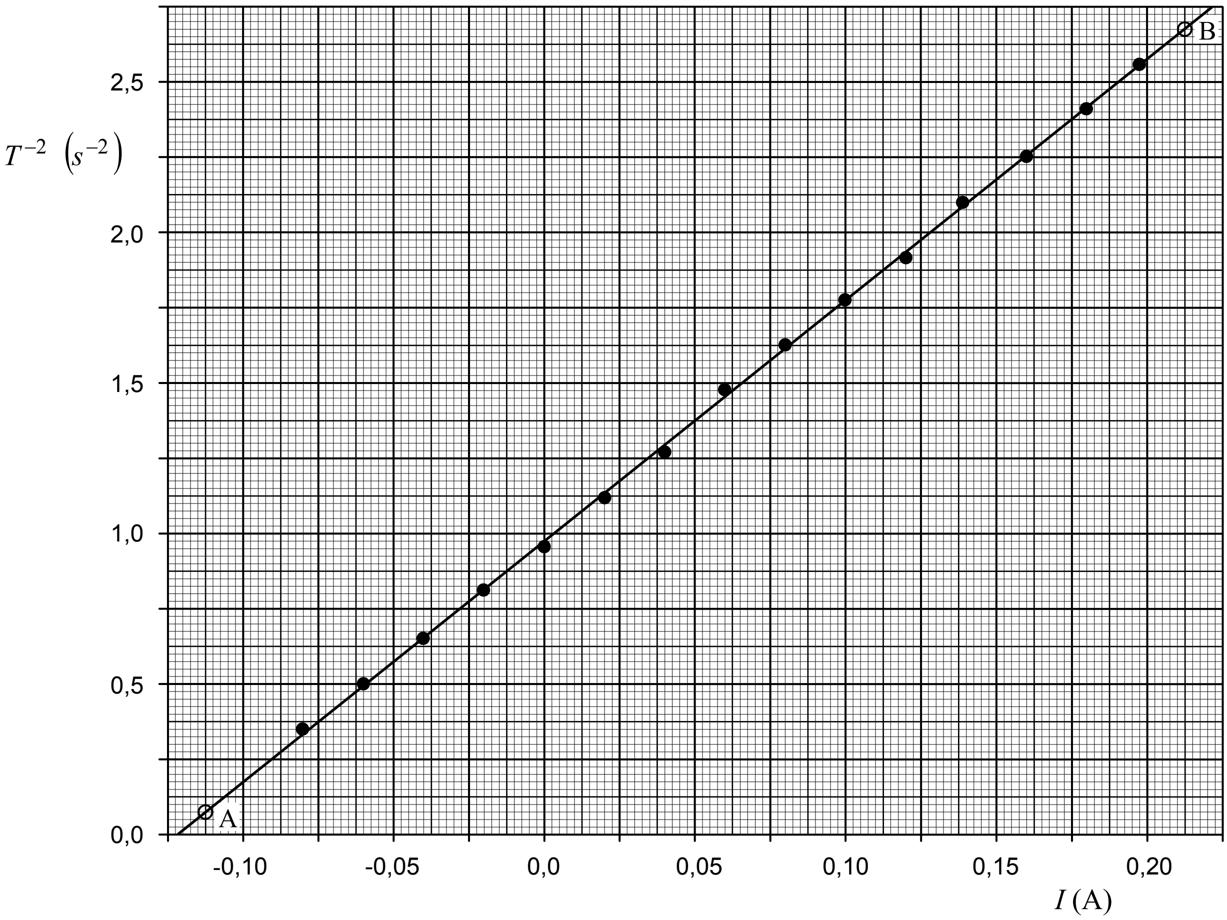
**c)** Deduce los valores de la constante $K$ de las bobinas de Helmholtz y del campo magnético local $B_H$.

**d)** Haz una estimación razonada de la incertidumbre $\Delta p$ de la pendiente obtenida en el apartado b).

**e)** Teniendo en cuenta lo anterior y la incertidumbre de la constante $\alpha$ dada en (4), haz una estimación de la incertidumbre $\Delta K$ de la constante de las bobinas que has obtenido en c).

## Problema experimental. Solución

**a)** A continuación se presenta la gráfica pedida, con el aspecto que tendría dibujada en papel milimetrado.




**b)** En la gráfica anterior también se ha trazado la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales. La pendiente, $p$, y la ordenada en el origen, $y_0$, de esta recta pueden determinarse a partir de las coordenadas de dos puntos de dicha recta. Para mejorar la precisión del resultado interesa tomar dos puntos alejados, por ejemplo los puntos A y B indicados en la gráfica, elegidos cerca de los extremos de la recta y coincidentes con cruces en la cuadrícula, para facilitar la lectura precisa de sus coordenadas.

$$(x_A; y_A) = (-0{,}1125\ \text{A};\ 0{,}075\ \text{s}^{-2})$$

$$(x_B; y_B) = (0{,}2125\ \text{A};\ 2{,}675\ \text{s}^{-2})$$

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \rightarrow \quad \boxed{p = 8{,}00\ \ \text{s}^{-2}\text{A}^{-1}}$$

La ordenada en el origen de la recta puede deducirse de las coordenadas de uno de los puntos auxiliares (o también puede leerse directamente en la gráfica)

$$y_A = p x_A + y_0 \quad \rightarrow \quad y_0 = y_A - p x_A \quad \rightarrow \quad \boxed{y_0 = 0{,}975\ \ \text{s}^{-2}}$$

Nota: un ajuste analítico por el método de *mínimos cuadrados* conduce a un resultado muy similar:

$$p = 8{,}001\ \ \text{s}^{-2}\text{A}^{-1}\ , \qquad y_0 = 0{,}9736\ \ \text{s}^{-2}$$

**c)** De acuerdo con las expresiones (3) y (5) del enunciado, se espera que la dependencia de $1/T^2$ con $I$ sea lineal, con pendiente y ordenada en el origen

$$p = \alpha K \frac{\mu_0 N}{2R} \quad \rightarrow \quad K = \frac{2pR}{\mu_0 \alpha N}$$

$$y_0 = \alpha B_H \quad \rightarrow \quad B_H = \frac{y_0}{\alpha}$$

Con los datos del enunciado se obtiene

$$\boxed{K = 0{,}716}$$

$$\boxed{B_H = 2{,}44 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}}$$

**d)** Para hacer una estimación de la incertidumbre de la pendiente vamos a trazar las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. Para ello hay que tener en cuenta la dispersión de los puntos respecto a la recta de mejor ajuste, que es nuestro caso es en promedio inferior al radio de los puntos dibujados. También es necesario tener en cuenta la incertidumbre estimada para los propios puntos experimentales. No vamos a tener en cuenta los posibles errores por falta de calibración del amperímetro, ya que no tenemos datos al respecto, pero sí podemos hacer una estimación de la incertidumbre de los valores de $1/T^2$ obtenidos tras cronometrar el periodo de oscilación. Con el método de medida empleado (promedio de 20 oscilaciones) y suponiendo que el error típico de un cronometraje manual es del orden de 0,1 s, una estimación razonable para la incertidumbre del periodo es

$$\Delta T = 0{,}005\ \mathrm{s}$$

La incertidumbre de $1/T^2$ puede calcularse numéricamente para cada punto a partir de los valores de $T_{\max} = T + \Delta T$ y $T_{\min} = T - \Delta T$ o, de una forma más elegante, tomando incrementos (en valor absoluto)

$$\Delta\left(\frac{1}{T^2}\right) = 2\frac{\Delta T}{T^3}$$

De una forma u otra es fácil comprobar que la incertidumbre de los primeros puntos, los correspondientes a corrientes negativas, es muy pequeña, inferior al tamaño de los puntos dibujados. Para corriente creciente la incertidumbre va aumentando y, por ejemplo, en el punto de corriente más alta alcanza el valor máximo

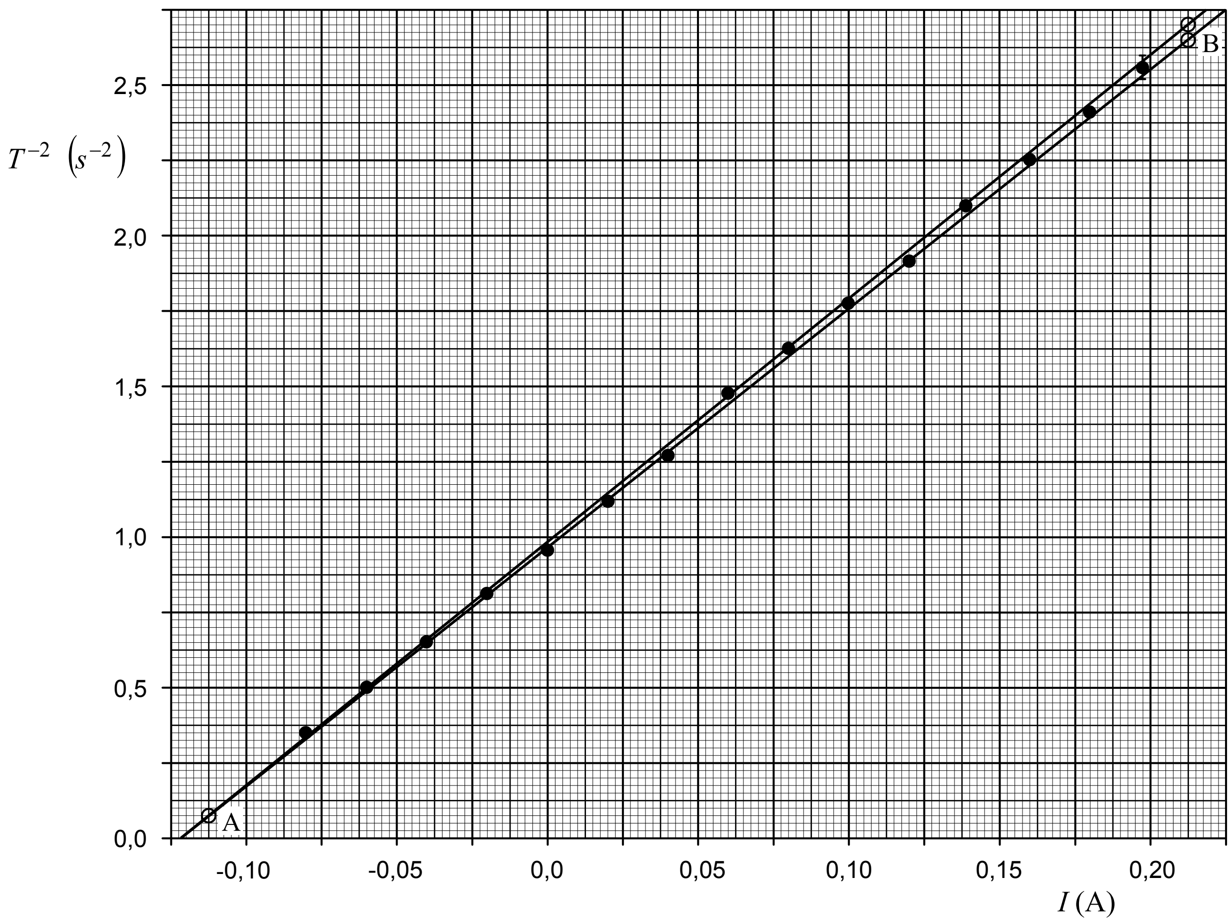
$$\Delta\left(\frac{1}{T^2}\right)_{I=197\,\mathrm{mA}} = 0{,}04\ \mathrm{s}^{-2}$$

En total, la "barra de error" del último punto no alcanza dos cuadritos arriba y abajo en la escala de la gráfica dibujada. Teniendo esto en cuenta, y la ya citada escasa dispersión de los puntos experimentales respecto a la recta óptima, es razonable considerar las rectas de pendientes máxima y mínima que a continuación se presentan, construidas manteniendo fijo el punto auxiliar A y con desviaciones de $\pm 0{,}025\ \mathrm{s}^2$ (un cuadrito) en la coordenada $y_B$ del segundo punto auxiliar

Con este criterio, es inmediato obtener los valores máximo y mínimo estimados para la pendiente, y su incertidumbre[2]

$$\left.\begin{array}{l} p_{\max} = 8{,}08\ \mathrm{s}^{-2}\mathrm{A}^{-1} \\ p_{\min} = 7{,}92\ \mathrm{s}^{-2}\mathrm{A}^{-1} \end{array}\right\} \quad \Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta p = 0{,}08\ \mathrm{s}^{-2}\mathrm{A}^{-1}}$$

[2] Un cálculo (no ponderado) da como resultado una incertidumbre $\Delta p = 0{,}1\ \mathrm{s}^{-2}\ \mathrm{A}^{-1}$ con un nivel de confianza del 95%.




**e)** En el apartado c) se ha obtenido la constante $K$ aplicando la expresión

$$K = \frac{2pR}{\mu_0 \alpha N}$$

Para calcular la incertidumbre de $K$ es necesario "propagar" las incertidumbres de la pendiente $p$ y de la constante $\alpha$.

Un método sencillo y rápido, aunque no muy exacto, de calcular los valores máximo y mínimo de $K$ consiste en ponerse en el "peor de los casos", es decir en combinar el valor máximo de $p$ en el numerador con el mínimo de $\alpha$ en el denominador, y viceversa

$$\left.\begin{aligned} K_{\max} &= \frac{2p_{\max}R}{\mu_0 \alpha_{\min} N} = 0{,}742 \\ K_{\min} &= \frac{2p_{\min}R}{\mu_0 \alpha_{\max} N} = 0{,}692 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \Delta K = 0{,}025$$

Como las dos fuentes de error consideradas son independientes, es más razonable, aunque también algo más laborioso, calcular independientemente sus influencias en la incertidumbre de $K$

$$\Delta K_p = \frac{1}{2}\left(K_{\max} - K_{\min}\right)_p = \frac{1}{2}\frac{2R}{\mu_0 \alpha N}\left(p_{\max} - p_{\min}\right) = \frac{2R}{\mu_0 \alpha N}\Delta p = K\frac{\Delta p}{p} = 0{,}007$$

$$\Delta K_\alpha = \frac{1}{2}\left(K_{\max} - K_{\min}\right)_\alpha = \frac{1}{2}\frac{2pR}{\mu_0 N}\left(\frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}}\right) \approx \frac{2pR}{\mu_0 N}\frac{\Delta\alpha}{\alpha^2} = K\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = 0{,}018$$

Una estimación razonable de la incertidumbre total de $K$ sería la suma de estas dos contribuciones

$$\Delta K = \Delta K_p + \Delta K_\alpha = 0{,}025$$

Pero, teniendo de nuevo en cuenta que las dos fuentes de error son independientes, es más correcto calcularla en la forma

$$\Delta K = \sqrt{\Delta K_p^2 + \Delta K_\alpha^2} = 0{,}019 \quad \rightarrow \qquad \boxed{\Delta K \approx 0{,}02}$$

El resultado final del experimento sería

$$\boxed{K = 0{,}72 \pm 0{,}02}$$

Nota 1: el valor de $\Delta K_\alpha$ es bastante mayor que el de $\Delta K_p$. Por ello, al redondear como es habitual a una única cifra significativa el resultado final, desaparece prácticamente la influencia de $\Delta p$ En otras palabras, si se quisiese mejorar la precisión del valor de $K$, sería prioritario conocer $\alpha$ con menos incertidumbre.

Nota 2: el valor teórico de la constante $K$, supuesto que el cable conductor es muy delgado, es

$$K = \frac{8}{5^{3/2}} = 0{,}7155$$