Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

Real Sociedad Española de Física R.S.E.F.

Universidad Zaragoza 1542

29 Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

1ª PRUEBA

23 de febrero de 2018

cofis Colegio Oficial de Físicos

iberCaja Obra Social

GOBIERNO DE ARAGON Departamento de Educación, Cultura y Deporte

P1.- Fluidos por un tubo.

Para medir la densidad de un líquido no miscible con otro de densidad conocida, por ejemplo agua, puede emplearse un tubo en forma de U en el que se vierten agua y el fluido cuya densidad se quiere determinar. Midiendo las alturas de las superficies libres de los fluidos en los dos brazos puede obtenerse fácilmente la densidad buscada.

Supongamos que introducimos en el tubo mercurio[1] y agua, de forma que, una vez alcanzado el equilibrio, la altura de la columna de agua es h_{ag} y la diferencia de los niveles de mercurio en los dos brazos es h (figura 1).

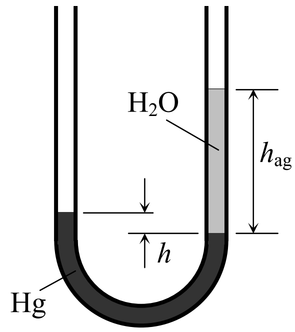


Fig. 1

Datos:

Densidad del agua: $\rho_{ag} = 1{,}00 \times 10^3$ kg/m^3

Altura de la columna de agua: $h_{ag} = 13{,}9$ cm

Diferencia de nivel del mercurio: $h = 1{,}02$ cm

Área de la sección del tubo (constante): $A = 7{,}85 \times 10^{-5}$ m^2

Aceleración de la gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2

a) Obtén una expresión analítica de la densidad del mercurio, ρ_{Hg}, en función de magnitudes conocidas. Calcula numéricamente esta densidad.

Por la rama izquierda vertemos aceite sobre el mercurio hasta que el nivel de mercurio en los dos brazos queda a la misma altura, como se indica en la figura 2. El volumen de aceite añadido hasta conseguirlo es $V_{ac} = 13{,}3$ cm^3

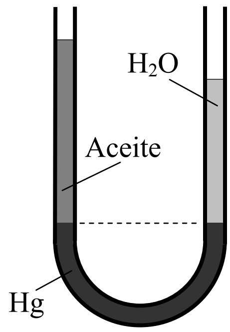


Fig. 2

b) Determina analíticamente y calcula la densidad del aceite, ρ_{ac}.

Supón ahora que sólo hay mercurio dentro del tubo. Soplando por uno de sus extremos, producimos una ligera sobrepresión en uno de los brazos, de forma que el nivel de mercurio en ese brazo queda una altura x por debajo de la de equilibrio, y en el otro brazo a una altura x por encima (figura 3). A continuación liberamos el sistema, con los dos brazos abiertos a la atmósfera.

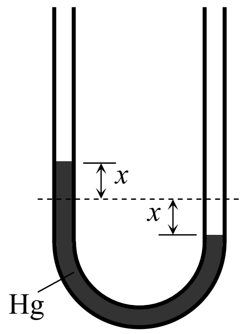


Fig. 3

c) Determina analíticamente, en función de x, la fuerza neta que tiende a retornar al mercurio a su posición de equilibrio.

Tras liberar el sistema, el mercurio oscila dentro del tubo, subiendo y bajando alternativamente por los dos brazos. Se observa que se produce una oscilación completa en $T = 1{,}02$ s.

d) Determina analíticamente y calcula el volumen de mercurio, V_{Hg}, en el interior del tubo.

[1] El mercurio es altamente tóxico y su uso fuera de laboratorios de investigación está prohibido por la Unión Europea.

P1.- Solución

a) Vamos a tener en cuenta que los puntos de un fluido en equilibrio que se encuentran a la misma altura están sometidos a la misma presión. Para el mercurio, la presión en la interfase mercurio-agua de la rama derecha y en el punto que está a la misma altura en la rama izquierda deben ser iguales, luego[2]

$$P_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{Hg}} g h = P_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{ag}} g h_{\mathrm{ag}}$$

de donde

$$\boxed{\rho_{\mathrm{Hg}} = \frac{h_{\mathrm{ag}}}{h} \rho_{\mathrm{ag}}} \qquad (1)$$

Operando en (1) con los datos del enunciado se obtiene

$$\boxed{\rho_{\mathrm{Hg}} = 1{,}36 \times 10^4 \ \mathrm{kg/m^3} = 13{,}6 \ \mathrm{g/cm^3}}$$

b) Ahora la presión será la misma en la interfase aceite-mercurio de la izquieda y en la interfase agua-mercurio de la derecha, por lo que

$$P_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{ac}} g h_{\mathrm{ac}} = P_{\mathrm{atm}} + \rho_{\mathrm{ag}} g h_{\mathrm{ag}} \qquad (2)$$

Despejando ρ_{ac} y teniendo en cuenta que $h_{\mathrm{ac}} = V_{\mathrm{ac}} / A$, (2) conduce a

$$\boxed{\rho_{\mathrm{ac}} = \rho_{\mathrm{ag}} \frac{A h_{\mathrm{ag}}}{V_{\mathrm{ac}}}}$$

Numéricamente

$$\boxed{\rho_{\mathrm{ac}} = 8{,}20 \times 10^2 \ \mathrm{kg/m^3} = 0{,}82 \ \mathrm{g/cm^3}}$$

c) La fuerza recuperadora neta será igual al peso de una columna de mercurio de altura $2x$

$$\boxed{F = 2A\rho_{\mathrm{Hg}} g x} \qquad (3)$$

Se obtiene una fuerza proporcional al desplazamiento respecto a la posición de equilibrio, x, y obviamente en sentido opuesto, es decir una fuerza "tipo muelle". Por tanto, en ausencia de rozamientos apreciables, es de esperar una oscilación armónica en torno al nivel de equilibrio.

d) El periodo de la oscilación armónica es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} \qquad (4)$$

Donde m es la masa de mercurio oscilante y K es la "constante recuperadora" que aparece en (3).

$$K = 2A\rho_{\mathrm{Hg}} g \qquad (5)$$

---

[2] Se aplica la conocida idea de que, en un fluido en equilibrio y en presencia del campo gravitatorio terrestre, g, la presión aumenta linealmente con la profundidad, con pendiente ρg, donde ρ es la densidad de fluido. A la misma igualdad se llega planteando la igualdad de los pesos de las columnas de mercurio por la izquierda y de agua por la derecha, y teniendo en cuenta que la sección del tubo, A, es constante.

Sustituyendo (5) en (4), poniendo $m = \rho_{\mathrm{Hg}} V_{\mathrm{Hg}}$ y despejando V_{Hg} se obtiene

$$\boxed{V_{\mathrm{Hg}} = \frac{Ag}{2\pi^2} T^2}$$

Con los datos numéricos del enunciado, resulta

$$\boxed{V_{\mathrm{Hg}} = 4,06 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}^3 = 40,6\ \mathrm{cm}^3}$$

Nota: La expresión (5) de K también puede deducirse calculando la variación de energía potencial entre la situación de equilibrio y la de la figura (3). Se obtiene una variación cuadrática con x, típica de un oscilador armónico

$$\Delta E_p = A \rho_{\mathrm{Hg}}\, g\, x^2$$

y la constante de proporcionalidad es $K/2$.

P2.- Un invariante adiabático.

Los *invariantes adiabáticos* son magnitudes que permanecen prácticamente constantes cuando algún parámetro de un sistema se hace variar muy lentamente. Lord Rayleigh (Premio Nobel de Física en 1904) entre su gran obra investigadora estudió las oscilaciones de un péndulo cuando la longitud del hilo de suspensión se acortaba muy lentamente. Demostró que el cociente entre la energía de las oscilaciones y la frecuencia era esencialmente constante.

El concepto de la invarianza adiabática jugó un importante papel en la "vieja" teoría cuántica. Paul Ehrenfest (Viena 1880- Ámsterdam 1933) estableció que las magnitudes adiabáticamente invariantes se pueden cuantizar: sus valores posibles se restringen a un conjunto discreto. A mediados del siglo pasado, de nuevo, recobraron interés en el estudio del movimiento de iones y electrones en plasmas de gases rarificados y prestaron un papel destacado en el diseño de aceleradores de partículas cargadas.

En este problema encontraremos un invariante adiabático análogo al del péndulo mencionado, pero con un planteamiento más simple.

Una bolita de masa m esta sujeta al extremo de un hilo que pasa por un orificio O de una mesa horizontal. Del otro extremo del hilo pende otra masa M, tal como se muestra en la figura 1. La masa suspendida M puede permanecer en reposo si la bolita describe una trayectoria circular de radio r_0 y se mueve con velocidad angular ω_0.

Se considera que no existen rozamientos apreciables, que el hilo es inextensible y su masa despreciable,

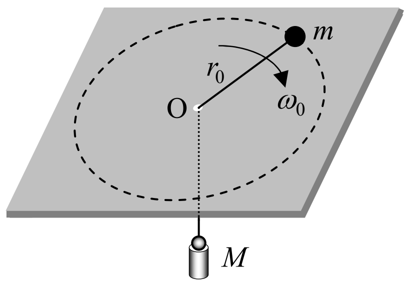


Fig. 1

a) ¿Cuál debe ser el valor de la masa M?

b) Determina el módulo del momento angular del sistema respecto al punto O, L_O.

c) Determina la energía mecánica de la bola[1], E_0, en función de L_O.

d) Escribe el cociente E_0 / f_0, donde f_0 es la frecuencia de rotación de la bola m en torno a O.

En las condiciones descritas, sujetamos el hilo vertical con la mano, retiramos la masa M y a continuación estiramos del hilo hacia abajo. Evidentemente, la distancia de la bola al orificio va a disminuir.

e) ¿Se conservará el momento angular del sistema? Es decir, ¿se mantendrá igual a L_O del apartado b? Justifica tu respuesta.

La orbita de la bola pasará a ser una espiral, como se muestra de forma aproximada en la figura 2a. La velocidad $\vec{v}$ de la bola dejará de ser perpendicular a la distancia r al punto O, como se indica en la figura 2b, que es una ampliación de la zona sombreada de la 2a. En consecuencia, la velocidad tendrá dos componentes ortogonales entre si, v_r y v_t. La *componente radial*, v_r, describe la velocidad con que varía (disminuye en este caso) la distancia r. La *componente transversal*, v_t, es la que tendría la bola si en cada instante describiese una circunferencia de radio r con velocidad angular ω.

A: punto de la trayectoria circular inicial en el que comienza a estirarse del hilo y la bola comienza a describir una órbita espiral.

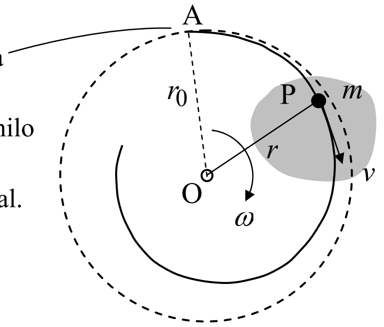


Fig. 2a

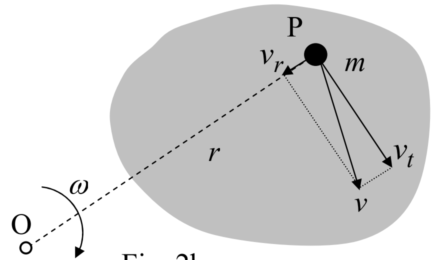


Fig. 2b

[1] Toma como referencia de energía potencial la superficie de la mesa.

En resumen, la velocidad al cuadrado de la bola será

$$v^2 = v_r^2 + v_t^2$$

con

$$v_r = dr / dt$$

$$v_t = \omega r$$

Suponiendo que la bola se encuentra en un cierto instante en el punto P de la trayectoria espiral,

f) Determina la energía mecánica E de la bola en un instante cualquiera en función de L_O.

g) Escribe el cociente E / f, donde f es la frecuencia de revolución de la bola m.

h) ¿Cómo debería realizarse el proceso para que, en todo momento, E / f se mantuviese aproximadamente igual a E_0 / f_0 y, por tanto, pudiera decirse que dicho cociente es un invariante adiabático?

P2.- Solución

a) La bolita de masa m sobre la cual actúa la tensión T del hilo, describe una trayectoria circular de radio r_0 con velocidad angular constante ω_0, por lo tanto

$$T = m\,\omega_0^2\, r_0$$

Como la tensión del hilo es igual al peso de la masa suspendida M, resulta

$$\boxed{M = \frac{m\,\omega_0^2\, r_0}{g}}$$

b) Como la velocidad de m es perpendicular a r_0, el módulo de su momento angular respecto a O es

$$\boxed{L_O = m\,\omega_0\, r_0^2} \qquad (1)$$

c) La energía mecánica es igual a su energía cinética

$$E_0 = \frac{1}{2} m\, v_0^2 = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2\, r_0^2$$

Como se pide expresarla en función de momento angular, teniendo en cuenta (1) se tiene

$$\boxed{E_0 = \frac{1}{2} L_O\, \omega_0}$$

d) La velocidad angular y la frecuencia f_0 están relacionadas por

$$\omega_0 = 2\pi\, f_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{E_0}{f_0} = \pi\, L_O} \qquad (2)$$

e) Una vez que se suprime la masa M y estiramos del hilo, la dirección de la fuerza[2] que actúa sobre la bola, la tensión del hilo, pasa por el punto O, luego es una fuerza central cuyo momento respecto a dicho punto es nulo. En consecuencia se conserva el momento angular L y, por tanto su valor será L_O, el mismo que tenía cuando la bola realizaba la trayectoria circular. Es decir

$$\boxed{L = L_O = \text{cte.}}$$

f) La fuerza que se realiza para estirar del hilo realiza trabajo mecánico y, en consecuencia, la energía mecánica de la bola cambiará, aunque seguirá siendo igual a su energía cinética

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2$$

De acuerdo con las indicaciones del enunciado, el cuadrado de la velocidad en cualquier punto de la trayectoria espiral será

$$v^2 = v_r^2 + v_t^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \omega^2\, r^2$$

Y la energía mecánica

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2 = \frac{1}{2} m\, v_r^2 + \frac{1}{2} m\, v_t^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} m\, r^2\, \omega^2 \qquad (3)$$

---

[2] Las otras fuerza que también actúan son su propio peso y la reacción normal de la mesa, que se anulan entre si. Tal como indica el enunciado, no se consideran fuerzas de rozamiento.

Observando la figura 2b, se deduce que el momento angular de la bola respecto a O es

$$L = m\,\omega\,r^2$$

Y recordando que $L = L_O$, la expresión de la energía E puede escribirse

$$\boxed{E = \frac{1}{2} L_O\,\omega + \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$$

Es decir, la energía mecánica es mayor debido a la velocidad "radial" de la bola o, con otras palabras, debido al acortamiento de la distancia *r*.

g) Para determinar el cociente de la energía mecánica y la frecuencia, *f*, basta tener de nuevo en cuenta que $\omega = 2\pi f$. Se obtiene

$$\boxed{\frac{E}{f} = \pi L_O + \frac{1}{2f} m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \qquad (4)$$

h) La expresión (4) coincidiría con la (2) si la velocidad con la que se acorta el hilo fuese nula o al menos muy pequeña. Es decir, si el acortamiento se realizase *muy lentamente*

$$\frac{dr}{dt} \approx 0$$

En estas condiciones

$$\frac{E}{f} \approx \text{Cte.}$$

Lo que, expresado con palabras, significa que:

Si el proceso descrito se lleva a cabo muy lentamente, la magnitud *E/f* es prácticamente constante; es un invariante adiabático.

P3.- El experimento de la gota de aceite de Millikan.

Hace poco más de quince años se realizó una encuesta entre científicos para determinar los *diez experimentos más bonitos de la historia*. Se buscaban experimentos relativamente sencillos, pero cruciales en el desarrollo de la Física. El tercer clasificado en esta lista fue el *experimento de la gota de aceite de Millikan*, del que nos vamos a ocupar en este ejercicio.

Este experimento, realizado en varias versiones entre 1909 y 1913, permitió demostrar que la carga eléctrica está cuantizada: debe ser siempre un múltiplo entero de la carga elemental, e, que se corresponde con la carga de un electrón en valor absoluto. Además, el experimento de Millikan permitió obtener una buena aproximación al valor actualmente aceptado, $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$.

Robert A. Millikan recibió el Premio Nobel de Física por este y otros trabajos en 1923.

En este experimento se emplean gotitas microscópicas de aceite, de densidad conocida ρ, algunas de las cuales se electrizan por fricción al salir por la boquilla del pulverizador, o por otros métodos, con una carga normalmente negativa $Q = -n\,e$, donde n es un número entero que suele ser pequeño. Por simplicidad, en adelante llamaremos q a la carga de la gota en valor absoluto, $q = |Q|$.

En presencia del campo gravitatorio terrestre, estas gotitas empiezan a caer con aceleración g, pero la fricción con el aire frena este movimiento. Se comprueba experimentalmente que la fuerza de resistencia F_r que actúa sobre una pequeña esfera que se mueve con velocidad v suficientemente baja en el seno de un fluido es proporcional a dicha velocidad, y se cumple la *Ley de Stokes*:

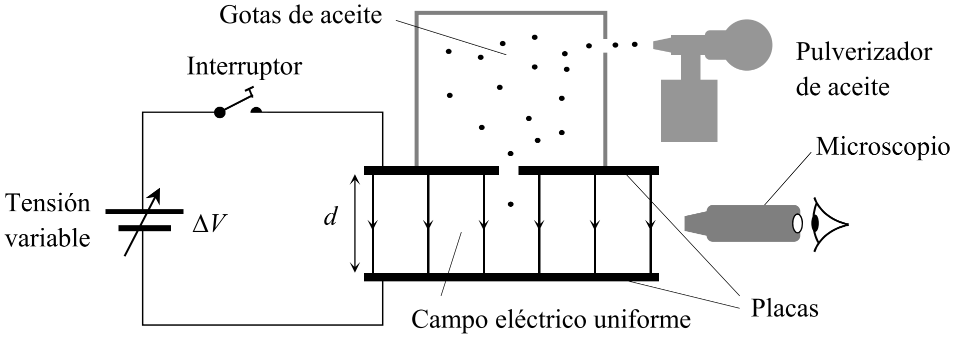
$$F_\mathrm{r} = 6\pi\eta R\,v$$

Donde η es una constante conocida como *viscosidad* del fluido (aire en nuestro caso) y R es el radio de la esfera. Conforme la gota cae y aumenta su velocidad, la fuerza de resistencia también aumenta, y la aceleración neta del movimiento disminuye. No es difícil comprender (y demostrar) que la velocidad de caída tiende asintóticamente a un valor constante, conocido como *velocidad límite*, cuando se igualan el peso de la gota y la fuerza de resistencia.

En el experimento de Millikan las gotas tienen una masa m muy pequeña, por lo que la velocidad límite es muy baja y se alcanza casi inmediatamente después de iniciarse el movimiento. El valor de esta velocidad límite, v_0, puede medirse experimentalmente observando a través de un microscopio con retículo graduado y cronometrando el tiempo que tarda la gota en recorrer una distancia conocida.

a) Obtén una expresión analítica del radio de la gota, R, en función de su velocidad límite de caída, v_0, y las constantes ρ, η y g.

Pero el objetivo principal del experimento es determinar la carga de la gota. Para ello, se deja caer entre dos placas conductoras horizontales, separadas una distancia d, que se pueden conectar a una diferencia de potencial ΔV ajustable. Por tanto, la gota se encuentra en el seno de un campo eléctrico uniforme vertical cuya intensidad puede ser modificada (véase la figura).



En una de las variantes del experimento de Millikan, se mide en primer lugar la velocidad límite de caída, v_0, en ausencia de campo eléctrico. A continuación se conecta el campo y, observando por el microscopio, se ajusta ΔV hasta conseguir que la gota permanezca en equilibrio, sin subir ni bajar. Llamaremos ΔV_0 al valor de la diferencia de potencial entre las placas que consigue este equilibrio.

b) Deduce una expresión analítica de la carga de la gota, q, en función de v_0, R, ΔV_0 y las constantes d y η.

Vamos ahora con algunas aplicaciones numéricas. Datos:

$g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$

$\eta = 1{,}80 \times 10^{-5} \text{ Pa s}$

$\rho = 8{,}99 \times 10^2 \text{ kg/m}^3$

$v_0 = 1{,}20 \times 10^{-4} \text{ m/s}$

$\Delta V_0 = 447 \text{ V}$

$d = 5{,}00 \text{ mm}$

c) Calcula los valores de R y q de esta gota.

Supón que, siguiendo el mismo procedimiento, se ha determinado la carga de otras tres gotas, obteniendo:

$q' = 6{,}352 \times 10^{-19} \text{ C}$

$q'' = 4{,}779 \times 10^{-19} \text{ C}$

$q''' = 3{,}184 \times 10^{-19} \text{ C}$

Y ahora ponte en el papel de Millikan: se supone que q, q', q'' y q''' son aproximadamente múltiplos enteros bajos (inferiores a 5) de la carga elemental e, que se desconoce a priori.

d) A partir de estas medidas, deduce el valor de e.

P3.- Solución

a) Sobre la gota actúan dos únicas fuerzas: su peso y la fuerza de fricción con el fluido. Por tanto su ecuación de movimiento en vertical, tomando sentido positivo hacia abajo, es

$$ma = mg - F_r = mg - 6\pi\eta R v \qquad (1)$$

Cuando la gota haya alcanzado su velocidad límite uniforme v_0, la aceleración del movimiento es nula

$$a(v = v_0) = 0 \quad \rightarrow \quad mg = 6\pi\eta R v_0 \qquad (2)$$

La masa de la gota esférica de aceite es

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Sustituyendo en (2) y despejando R se obtiene

$$\boxed{R = \left(\frac{9}{2}\frac{\eta}{\rho g} v_0\right)^{1/2}} \qquad (3)$$

b) La gota está en equilibrio cuando se iguala su peso, hacia abajo, con la fuerza eléctrica, hacia arriba

$$mg = qE = q\frac{\Delta V_0}{d} \qquad (4)$$

Teniendo en cuenta (2), se deduce

$$\boxed{q = 6\pi\eta d R \frac{v_0}{\Delta V_0}} \qquad (5)$$

c) Operando en (3) y en (5) se obtiene

$$\boxed{R = 1{,}050 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}} \qquad \boxed{q = 4{,}782 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}}$$

d) Dividiendo los valores de las cuatro cargas por la más baja, q''', se deduce que, aproximadamente, están en la proporción 3:4:3:2, por lo que

$$n = 3 \quad \rightarrow \quad e = 1{,}594 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$n' = 4 \quad \rightarrow \quad e' = 1{,}588 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$n'' = 3 \quad \rightarrow \quad e'' = 1{,}593 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

$$n''' = 2 \quad \rightarrow \quad e''' = 1{,}592 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Naturalmente, el resultado más fiable del experimento es el promedio de los cuatro anteriores

$$\boxed{e = 1{,}592 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}}$$

Nota: este fue el valor de e publicado por Millikan en 1913, un 0,6% inferior al actualmente aceptado. Probablemente, la pequeña desviación fue debida a que utilizó un valor inexacto para la viscosidad del aire.