Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Real Sociedad Española de Física
R.S.E.F.

Universidad Zaragoza
1542

35 Olimpiada

ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

2ª PRUEBA

23 de febrero de 2024

FZC Fundación Zaragoza Conocimiento

INMA Instituto de Nanociencia y Materiales de Aragón

I3A Instituto Universitario de Investigación en Ingeniería de Aragón Universidad Zaragoza

LSC Laboratorio Subterráneo de Canfranc

BIFI Instituto Universitario de Investigación de Biocomputación y Física de Sistemas Complejos Universidad Zaragoza

CEFCA Centro de Estudios de Física del Cosmos de Aragón

cofis Colegio Oficial de Físicos

Fundación ibercaja

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

Problema experimental. Medir la masa de un astronauta

En una nave que orbita alrededor de la Tierra no se puede usar una báscula para pesar a los astronautas, debido a que se experimenta una sensación de ingravidez. Por ello, la masa de los astronautas en la estación espacial ISS se mide con un aparato que se basa en el movimiento vibratorio armónico, denominado *Body Mass Measurement Device*. Cuando el astronauta se coloca en él, el aparato inicia un movimiento vibratorio y mide el periodo de oscilación, a partir del cual se determina la masa del astronauta.

Modelo teórico.

Si se coloca una masa M sobre un resorte ideal (sin masa) de constante elástica k y se le da un pequeño empujón vertical, M oscila armónicamente con un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}\,, \qquad (1)$$

de donde se puede obtener el valor de M en función de T,

$$M = \frac{k}{4\pi^2}T^2\,. \qquad (2)$$

Por tanto, si se conoce k y se mide T con un cronómetro, es inmediato determinar M.

Los muelles reales tienen una masa m, no siempre despreciable frente a la masa M. Podría pensarse que, como la masa del resorte también oscila, el periodo de oscilación vendría dado por la misma expresión (1) sustituyendo M por $M+m$.

Pero esta idea no es correcta. Para comprenderlo, basta pensar que cada espira del resorte oscila con una amplitud diferente, desde la espira superior que lo hace con la misma amplitud que M, hasta la inferior que prácticamente no se mueve. Esto hace intuir una contribución parcial de m a la masa efectiva oscilante, es decir que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M+\alpha m}{k}}\,, \qquad (3)$$

donde α es una constante menor que la unidad, en principio desconocida.

Montaje experimental.

En la figura 1 se muestra una fotografía del dispositivo de medida de la masa corporal del que va provisto la ISS, en el que se observa cómo debe sujetarse el astronauta debido a la ausencia de gravedad. Se muestra también un modelo simplificado del dispositivo: una plataforma de masa M_p está sujeta a un muelle de masa m. A esta plataforma se sujeta la masa M_a del astronauta, de modo que la masa suspendida será $M = M_p + M_a$.

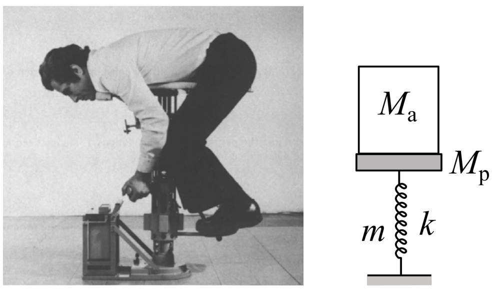


Figura 1

Se separa la plataforma de la posición de equilibrio y se suelta, produciéndose la oscilación. Para calibrar el dispositivo es preciso determinar los valores de k y α, a partir de medidas de T para diversos valores de M_a, mediante la relación que se obtiene de la ecuación (3),

$$M_a = \frac{k}{4\pi^2}T^2 - (M_p + \alpha m)\,. \qquad (4)$$

Preguntas.

En un experimento de calibración del *Body Mass Measurement Device* se miden los valores del periodo de oscilación T cuando se colocan en el dispositivo cuerpos de masa M_a.

M_a (kg)	T (s)
0	0,71
20	1,58
40	2,03
60	2,38
80	2,80
100	3,04

a) Elabora una tabla de valores para los puntos $(x,y)=(T^2,M_a)$, y represéntalos gráficamente en el papel milimetrado.

b) Determina el valor de la pendiente p de la recta que mejor se ajusta a estos puntos.

c) A partir de la pendiente p y de la expresión (4) deduce el valor de la constante elástica del muelle, k.

d) Haz una estimación razonada de la incertidumbre Δp de la pendiente obtenida en el apartado b).

e) Teniendo en cuenta lo anterior, haz una estimación de la incertidumbre Δk en el valor de la constante elástica que has obtenido en c).

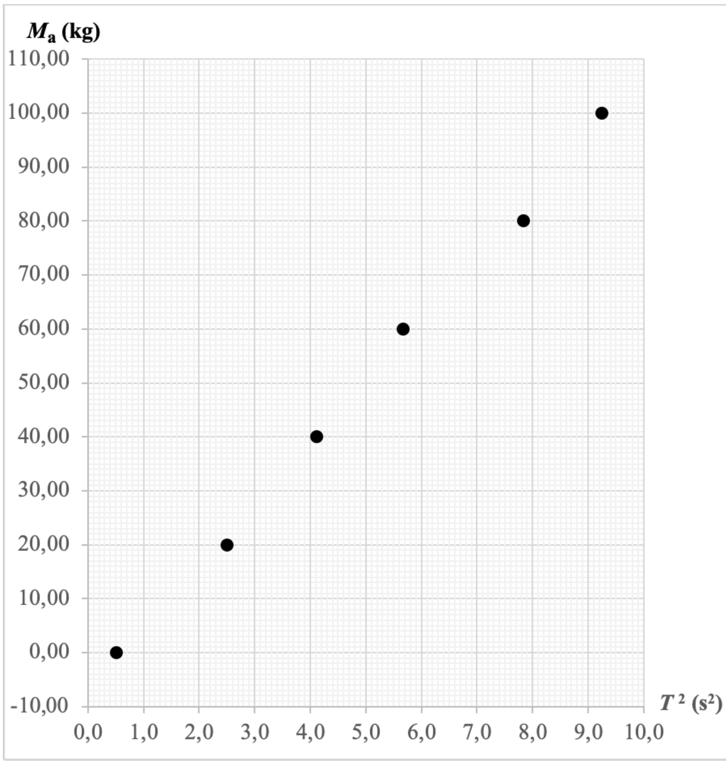
f) Determina el valor de la constante α.

Datos: Masa del muelle, m = 800 g; masa de la plataforma, M_p = 6,80 kg.

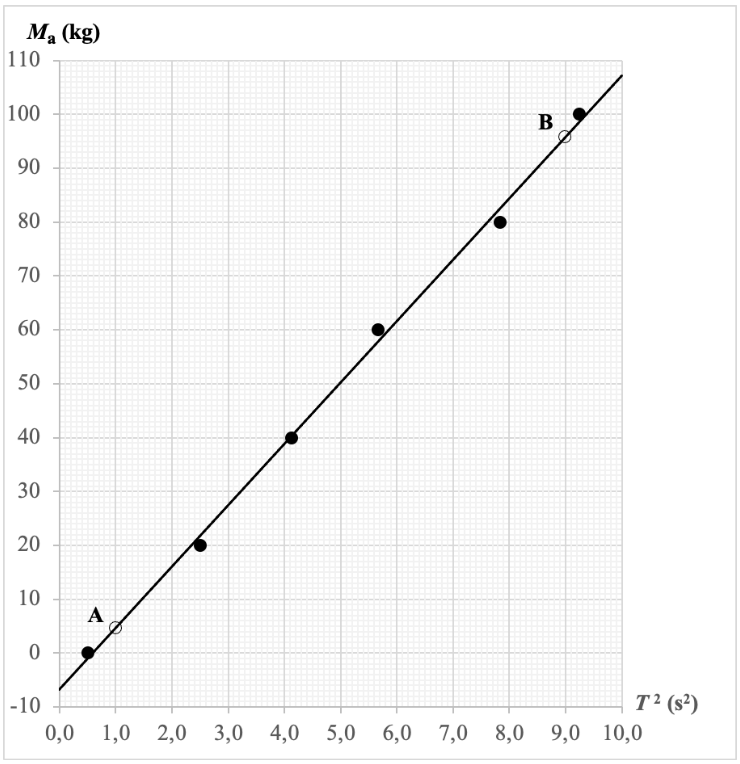
Problema experimental. Solución

a) A continuación, se presenta la tabla y la gráfica pedida, con el aspecto que tendría dibujada en papel milimetrado.

T^2 (s^2)	M_a (kg)
0,50	0
2,50	20
4,12	40
5,66	60
7,84	80
9,24	100



b) Para determinar de forma "manual" la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales se busca la recta que pasa lo más cerca posible de todos ellos y de forma que queden igual de dispersos a cada lado.



Tomamos dos puntos auxiliares alejados sobre esta recta (no puntos experimentales), por ejemplo $A(1{,}0;\ 5{,}0)$ y $B(9{,}0;96{,}0)$.

La pendiente de la recta es

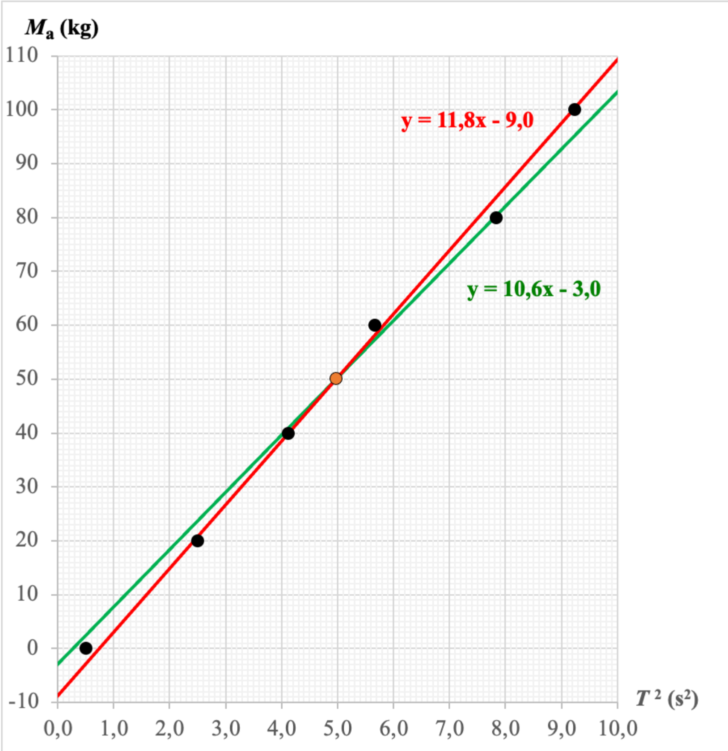
$$\boxed{p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{96{,}0 - 5{,}0}{9{,}0 - 1{,}0} = 11{,}4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}}.$$

Un ajuste analítico por el método de *mínimos cuadrados* conduce a un valor prácticamente igual.

c) De acuerdo con la expresión (4) del enunciado, se espera que la dependencia de M_a con T^2 sea lineal, con pendiente

$$p = \frac{k}{4\pi^2} \quad \rightarrow \quad k = 4\pi^2 p \quad \rightarrow \quad \boxed{k = 450 \text{ N/m}}.$$

d) Para hacer una estimación de la incertidumbre Δp trazamos, de nuevo "a ojo", las rectas que pasando por el "centro" de los puntos, $(\bar{x}, \bar{y}) = (4{,}98;\ 50{,}0)$ y, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales.



La incertidumbre estimada de la pendiente, Δp, vendrá dada por

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta p = \frac{11{,}8 - 10{,}6}{2} = 0{,}6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}}.$$

Dado que sólo tenemos 6 puntos experimentales, la incertidumbre se da con una cifra significativa, de modo que la pendiente con su incertidumbre será

$$\boxed{p = 11{,}4 \pm 0{,}6 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}}.$$

e) Dado que la constante elástica es proporcional a la pendiente *p*, su incertidumbre se puede obtener directamente como

$$\Delta k = 4\pi^2 \Delta p \quad \rightarrow \quad \Delta k = 20 \text{ N/m},$$

donde también hemos tenido en cuenta que, en este caso, la incertidumbre se da con una cifra significativa. Así, a partir de los datos del experimento, podemos concluir que

$$\boxed{k = 450 \pm 20 \text{ N/m}}.$$

f) Haciendo $T^2 = 0$ en la expresión (4) del enunciado obtenemos el punto de corte de la recta de mejor ajuste con el eje *y*, dado por

$$c = -(M_p + \alpha m) .$$

De la gráfica obtenida en el apartado b,

$$c \approx -7{,}0\ \text{kg} .$$

A partir de este valor y de los valores de la masa del muelle, *m*, y de la plataforma, M_p, suministrados, obtenemos el valor de α,

$$\alpha = \frac{-c - M_p}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha \approx 0{,}25}.$$

Se puede comprobar teóricamente que cuando la masa del muelle es muy pequeña, de modo que $\dfrac{m}{M_p + M_a} \to 0$, el coeficiente α toma el valor $\alpha = \dfrac{1}{3}$.