



Real
Sociedad
Española de
Física

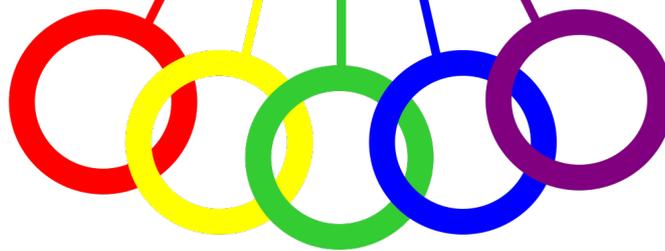


Universidad
Zaragoza

35 Olimpiada

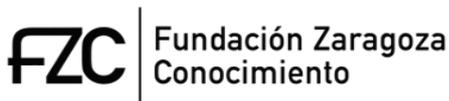
*ESPAÑOLA DE
FÍSICA*

FASE DE ARAGÓN



1ª PRUEBA

23 de febrero de 2024



Instituto Universitario de Investigación
en Ingeniería de Aragón
Universidad Zaragoza



P1. Rizando el rizo.

Un carrito de masa m se apoya contra un muelle de constante k comprimido una distancia x . Se suelta el muelle de forma que el carrito sale disparado hacia la derecha por un rail sin rozamiento, como muestra la figura 1. En su trayectoria se encuentra con un bucle circular de radio R por el que asciende. Considera que las dimensiones del carrito son despreciables frente a R .

- a) Calcula, en función de k , m , y R , qué distancia x_A se debe comprimir el muelle para que el carrito se quede parado en el punto A.

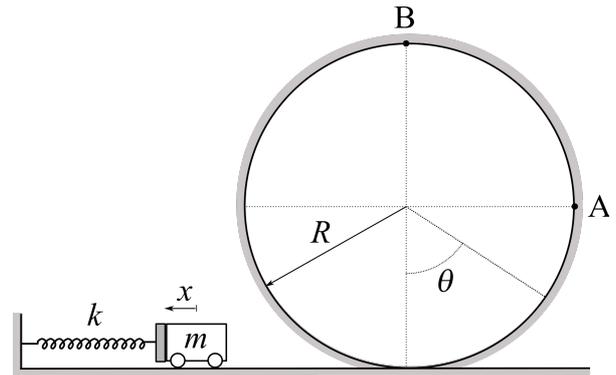


Figura 1

Para una distancia $x < x_A$ el carrito se parará antes de A, en un punto determinado por el ángulo $\theta < 90^\circ$.

- b) Obtén la expresión, en función de x , del ángulo θ para el que el carrito se detiene.

Se desea que el carrito describa una vuelta completa al bucle, pasando por el punto B.

- c) Dibuja las fuerzas que actúan sobre el carrito cuando pasa por el punto B.
- d) ¿Cuál es la velocidad mínima v_B que debe tener el carrito en el punto B para que describa una vuelta completa?
- e) ¿Cuál es la distancia mínima x_B que debe comprimirse el muelle para que el carrito llegue al punto B.

Para una distancia x tal que $x_A < x < x_B$ el carrito superará el punto A, pero se separará del rail antes de llegar al punto B.

- f) Obtén la expresión, en función de x , del ángulo θ_S a partir del cual el carrito se separa del rail.

P1. Solución

- a) Aplicando la conservación de energía entre el punto en que el carrito apoya contra el muelle comprimido y el punto A, situado a una altura R , donde se para ($v_A = 0$),

$$\frac{1}{2}kx_A^2 = mgR, \quad (1)$$

de donde obtenemos

$$x_A = \sqrt{\frac{2mgR}{k}}. \quad (2)$$

- b) Como muestra la figura 2, la altura de un punto de la pista en función de θ viene dado por $R(1 - \cos\theta)$.

Aplicando la conservación de energía entre el punto en que el carrito apoya contra el muelle comprimido y el punto del bucle en el que el carrito se para ($v = 0$),

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgR(1 - \cos\theta), \quad (3)$$

de donde

$$\cos\theta = 1 - \frac{kx^2}{2mgR}. \quad (4)$$

- c) En el punto B sobre el carrito actuará el peso, mg , y la normal de la superficie de la pista, N_B , tal como muestra la figura 3.

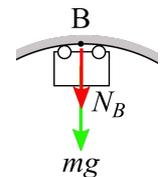


Figura 3

- d) Para que llegue al punto B no es suficiente con que lo alcance con $v_B = 0$. Como en el bucle describe un movimiento circular, en el punto B se cumple que

$$mg + N_B = m\frac{v_B^2}{R}, \quad (5)$$

Como el peso no se anula, el caso límite (v_B mínima) correspondería a $N_B = 0$, de modo que

$$v_B = \sqrt{gR}. \quad (6)$$

- e) Aplicando la conservación de energía entre el punto en que el carrito apoya contra el muelle comprimido y el punto B, situado a una altura $2R$,

$$\frac{1}{2}kx_B^2 = mg2R + \frac{1}{2}mv_B^2. \quad (7)$$

Sustituyendo el valor v_B de la ecuación (6),

$$\frac{1}{2}kx_B^2 = mg2R + \frac{1}{2}mgR, \quad (8)$$

de donde podemos despejar x_B ,

$$x_B = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}. \quad (9)$$

f) La figura 4 muestra las fuerzas que actúan sobre el carrito una vez superado el punto A. La componente del peso en dirección radial es $mg \cos(180 - \theta)$, así que

$$mg \cos(180 - \theta) + N = m \frac{v^2}{R}. \quad (10)$$

El carrito deja de tener contacto con el bucle cuando $N = 0$, de modo que

$$v = \sqrt{gR \cos(180 - \theta_S)}. \quad (11)$$

Aplicando la conservación de energía entre el punto en que el carrito apoya contra el muelle comprimido y el punto del bucle en el que se separa,

$$\frac{1}{2} kx^2 = mgR[1 + \cos(180 - \theta_S)] + \frac{1}{2} mv^2. \quad (12)$$

Sustituyendo el valor de v obtenido en la ecuación (11) y utilizando la relación $\cos(180 - \theta_S) = -\cos \theta_S$ se obtiene

$$\cos \theta_S = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{kx^2}{mgR} \right). \quad (13)$$

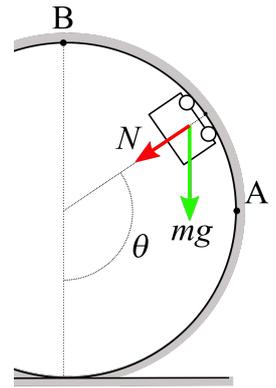
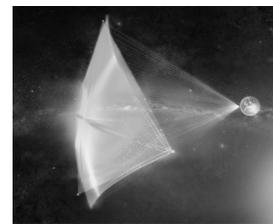


Figura 4

P2. Viaje a Próxima b.

Alfa Centauri es un sistema estelar compuesto por tres estrellas, la más pequeña de las cuales, Próxima Centauri, es una enana roja y la estrella más próxima al Sol, a **4,25 años-luz**. Próxima Centauri tiene al menos un planeta, Próxima b, descubierto en 2016, y que despertó mucho interés al ser de tamaño similar a la Tierra y estar en la zona habitable de la estrella, en la que puede existir agua en estado líquido.

Con la tecnología actual se tardaría del orden de 30000 años en alcanzar el sistema estelar de Alfa Centauri. Sin embargo, una propuesta reciente denominada *Breakthrough Starshot*¹, que lideraron Zuckerberg y Hawking, propuso conseguirlo en **20 años** con naves espaciales miniaturizadas de unos gramos de masa impulsadas mediante *velas de luz*. Todavía hay que desarrollar esta tecnología, pero parece un hito accesible en unos años de investigación.



Considera que la masa de la nave espacial es de 1,5 g y que, partiendo del reposo, alcanza una velocidad estable de crucero v_0 , que mantiene durante los 20 años de su viaje.

a) Calcula la velocidad v_0 , suponiendo que se alcanza de forma inmediata.

Realmente la velocidad v_0 no se adquiere de forma inmediata, sino que hay que acelerar la nave durante un determinado tiempo Δt , usando una fuerza constante F , que actúa sobre la vela.

b) Expresa la fuerza F necesaria para alcanzar v_0 , en función de Δt .

Las *velas de luz* utilizarán la presión de la radiación de un haz láser emitido desde la Tierra para generar el impulso necesario sobre la vela, mucho mayor que el de la radiación solar. Para ver cómo puede la luz empujar una vela tienes que pensar que la luz está compuesta por partículas, los fotones, que tienen energía, E y momento lineal, p , aunque no tengan masa, siendo la relación entre ellos $p = E/c$, donde c es la velocidad de la luz. Considera que la vela se comporta como un espejo perfecto (equivalente a una pared rígida) y que los fotones inciden perpendicularmente a la vela.

c) Obtén la expresión de la fuerza realizada sobre la vela por un gran número de fotones, N , durante el tiempo, Δt , en el que el sistema de aceleración, es decir el láser, esté activo.

Supón que la vela tiene unas dimensiones de $4 \times 4 \text{ m}^2$, y que el sistema láser la ilumina con una intensidad de $6,25 \text{ GW/m}^2$.

d) Calcula la potencia de la luz que incide sobre la vela.

e) ¿Durante cuánto tiempo Δt tendrá que estar encendido el sistema láser para conseguir impulsar la nave hasta Próxima b como se desea?

Las velas solares se realizan con materiales muy delgados y resistentes, como por ejemplo el polímero denominado Kapton, ampliamente utilizado en aplicaciones espaciales, que es estable hasta $400 \text{ }^\circ\text{C}$, tiene una densidad de $1,42 \text{ g/cm}^3$, y un calor específico de $1090 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$. El Kapton debe llevar un recubrimiento de multicapas que le confiera gran reflectancia, aunque una pequeña parte de la energía (alrededor de 10^{-11} veces la radiación incidente) será absorbida, calentando el material. Considera que la lámina tiene un espesor de $0,05 \text{ micras}$.

f) Calcula el incremento de temperatura de la vela durante el tiempo que está iluminada por el láser.

Dato: velocidad de la luz en vacío $c = 3 \times 10^8 \text{ km/s}$.

¹ <https://breakthroughinitiatives.org/initiative/3>

P2. Solución

- a) La distancia entre Próxima b y la Tierra es de 4,25 años luz, y el tiempo del viaje desde la Tierra debe ser de 20 años, de modo que la velocidad con la que se mueve la nave (supuesta constante) es

$$v_0 = \frac{4,25}{20}c \rightarrow \boxed{v_0 = 0,21c}. \quad (1)$$

- b) En el movimiento uniformemente acelerado partiendo del reposo podemos obtener la aceleración a partir del cambio de velocidad en un determinado intervalo temporal,

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0 - 0}{\Delta t} = \frac{0,21c}{\Delta t}, \quad (2)$$

de modo que la fuerza expresada en unidades del SI quedará como

$$F = m \cdot a = 1,5 \times 10^{-3} \frac{0,21 \times 3 \times 10^8}{\Delta t} \rightarrow \boxed{F = \frac{94500}{\Delta t} \text{ N}}. \quad (3)$$

- c) Podemos calcular la fuerza a partir del momento lineal transferido por el fotón a la vela-espejo, Δp ,

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (4)$$

Como cada fotón incide con momento p y se refleja con el mismo momento en sentido contrario, el momento transferido por el fotón es $2p$, de modo que podemos calcular la fuerza media producida por el choque de N fotones como

$$F = \frac{N \cdot 2p}{\Delta t}, \quad (5)$$

y, teniendo en cuenta la relación $p = E/c$, se obtiene

$$\boxed{F = \frac{2NE}{c\Delta t}}. \quad (6)$$

Este cálculo no sería correcto si solo hubiera una partícula, pero al haber N partículas que chocan contra la vela durante el tiempo Δt en el que está activo el láser, podemos calcular la fuerza promedio sobre la vela durante todo ese tiempo, de forma similar a como se hace en el estudio de la presión de las moléculas de un gas sobre la pared del recipiente que lo contiene.

- d) La potencia recogida por la vela se puede calcular como el producto de la intensidad de la luz multiplicado por la superficie de la vela,

$$P = I \cdot A = 6,25 \times 4 \times 4 \text{ GW} \rightarrow \boxed{P = 100 \text{ GW}}. \quad (7)$$

- e) A partir de la potencia que incide sobre la vela, podemos obtener la energía recibida en el tiempo Δt que el láser está activo por el choque de los N fotones,

$$NE = P\Delta t, \quad (8)$$

de modo que la fuerza sobre la vela calculada en (6) se puede expresar como

$$F = \frac{2P}{c} = \frac{2 \times 10^{11}}{3 \times 10^8} = 667 \text{ N}. \quad (9)$$

Por lo tanto, el tiempo Δt que debe estar encendido el láser se obtiene a partir de la ecuación (3),

$$\Delta t = \frac{94500}{F} = \frac{94500}{667} \rightarrow \boxed{\Delta t = 142 \text{ s}}. \quad (10)$$

f) La variación de temperatura de la lámina de Kapton es proporcional al calor, Q , absorbido por la misma,

$$\Delta T = \frac{Q}{mc_e}, \quad (11)$$

donde m es la masa de la vela y c_e el calor específico del material. La masa de la vela se puede obtener a partir de la densidad ρ del Kapton, del espesor d y de la superficie A ,

$$m = \rho A d. \quad (12)$$

El calor absorbido por el material será

$$Q = 10^{-11} P \Delta t. \quad (13)$$

Introduciendo (12) y (13) en (11) obtenemos

$$\Delta T = \frac{10^{-11} P \Delta t}{\rho A d c_e} = \frac{10^{-11} \times 10^{11} \times 142}{1,42 \times 10^3 \times 4 \times 4 \times 0,05 \times 10^{-6} \times 1090},$$
$$\Delta T = 115 \text{ K} = 115 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (11)$$

Actualmente, la tecnología disponible no permite la producción de láminas de Kapton tan delgadas ni la creación de recubrimientos con una reflectancia tan alta como los indicados en el ejercicio. Estos requisitos, junto con otros desafíos inherentes a la misión *Breakthrough Starshot*, plantean un formidable reto científico y tecnológico. Este desafío será abordado en las próximas décadas, y es probable que algunos de los participantes en esta Olimpiada de Física contribuyan a los avances en este campo.

P3. Modelo físico de una neurona.

El pasado 25 de octubre de 2023, se inauguró en el edificio Paraninfo de la Universidad de Zaragoza un nuevo espacio expositivo permanente dedicado a la figura de Santiago Ramón y Cajal, Premio Nobel de Medicina en 1906, en reconocimiento a su trabajo sobre la estructura del sistema nervioso. La *neurona* constituye el elemento básico del sistema nervioso (Fig. 1). A través del axón se transmite el impulso nervioso desde el cuerpo celular hasta los terminales del axón.

Podemos considerar el axón como un cilindro rodeado por la membrana celular y relleno por el axoplasma, que es una disolución de diversos iones en agua, entre los que destacan Na^+ y K^+ . El exterior de la membrana del axón está rodeado también de una disolución con diferentes concentraciones de los mismos iones. En la membrana hay un conjunto de canales que permiten o bloquean el paso de iones y unas proteínas denominadas bombas sodio-potasio, que extraen sodio e introducen potasio, a costa del consumo de energía metabólica.

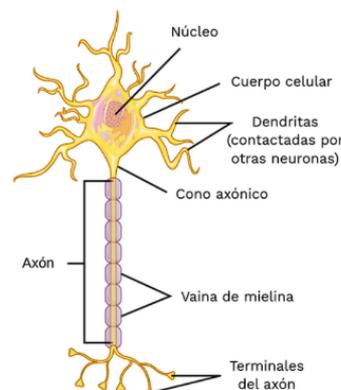


Figura 1

Ion	Concentración (mol/m ³)	
	Interior	Exterior
Na^+	15	145
K^+	150	5

Tabla 1

Cuando la neurona está en reposo, la pared interna de la membrana celular está cargada negativamente y la pared externa está cargada positivamente, con una diferencia de potencial electrostático $V_0 = -70$ mV respecto del exterior de la membrana. En esta situación de reposo, la concentración de iones de Na^+ y K^+ en el interior y el exterior de la membrana es la que se muestra en la Tabla 1.

Además del efecto sobre los iones del potencial electrostático, las diferencias de concentración de cada ion entre el interior y el exterior tienden a igualarse a través de la membrana. Este efecto puede expresarse mediante un potencial V_X , al que se ve sometido el ion X , denominado potencial de Nerst, que viene determinado por

$$V_X = \frac{RT}{eN_A} \ln \frac{[X]_{\text{ext}}}{[X]_{\text{int}}}, \quad (1)$$

con R la constante de los gases ideales, T la temperatura, e la unidad de carga elemental, N_A el número de Avogadro, y $[X]_{\text{int}}$ y $[X]_{\text{ext}}$ las concentraciones del ion X en el interior y exterior de la membrana celular, respectivamente.

El “duelo” entre la interacción eléctrica y el gradiente de concentración de ambos iones entre el interior y el exterior celular resultan en una diferencia de potencial V_X^{eff} , denominada potencial efectivo, diferente para cada ion X , dada por

$$V_X^{\text{eff}} = V_X - V_0. \quad (2)$$

a) Con las concentraciones de los iones Na^+ y K^+ mostradas en la Tabla 1, calcula el potencial efectivo para cada ion. ¿Qué efecto producirá este potencial efectivo en cada ion a ambos lados de la membrana?

Considera que un ion K^+ pasa del interior al exterior de la membrana sin experimentar ningún tipo de rozamiento, partiendo del reposo desde un punto en el eje del axón.

b) Determina la velocidad del ion K^+ al abandonar la membrana celular.

c) ¿Cuánto tiempo tarda el ion K^+ en recorrer el radio del axón?

Cuando llega un estímulo nervioso a un punto del axón (que tomamos como $x = 0$), la diferencia de potencial de la membrana en ese punto aumenta hasta $V_p = +40$ mV. Esta diferencia de potencial disminuye con la distancia a lo largo del axón hasta alcanzar el potencial de reposo V_0 debido a dos efectos: la corriente que se pierde a través de la membrana debida a canales iónicos permanentemente abiertos, caracterizada por la llamada conductancia por unidad de área, $g_m \approx 0,01 \text{ k}\Omega^{-1} \text{ cm}^{-2}$; y una resistencia a lo largo del axón debida al axoplasma, R_L , que es directamente proporcional a la resistividad del líquido intracelular, ρ_a , a la longitud del axón, L_a , e inversamente proporcional a la sección transversal del axón, S_a .

d) Escribe la expresión de la resistencia eléctrica R_L en función de ρ_a , L_a y del radio del axón. Calcula su valor numérico.

Es posible expresar la diferencia de potencial a lo largo del axón en función de λ como

$$V(x) = (V_p - V_0)e^{-x/\lambda}, \quad (3)$$

donde $\lambda = 1/\sqrt{g_m R_L}$ se denomina “parámetro espacial”, e indica qué distancia recorre una corriente eléctrica para un estímulo débil antes de que la mayor parte de ella se pierda a través de la membrana.

e) Obtén el valor del parámetro espacial λ .

f) Calcula el trabajo realizado sobre un ion Na^+ para trasladarlo desde $x = 0$ hasta una distancia $x_m = 0,2$ cm.

g) Obtén la expresión en función de x de la fuerza eléctrica que actúa sobre una carga q a lo largo del axón a partir de la derivada (gradiente) del potencial.

Ayuda: Sea $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$ con a y b constantes, entonces $\frac{d f(x)}{d x} = a \cdot b \cdot e^{b \cdot x}$.

h) Calcula el valor de la fuerza que actúa en la dirección del eje del axón sobre ion Na^+ situado en la posición $x = 0$.

Datos:

- Constante de los gases ideales: $R = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Temperatura del cuerpo humano: $T_{\text{cuerpo}} = 37 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Unidad de carga elemental: $1 e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$.
- Número de Avogadro: $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.
- Diámetro del axón: $D_A = 10 \text{ }\mu\text{m}$.
- Masas atómicas: $m(\text{Na}) = 23 \text{ u}$, $m(\text{K}) = 39 \text{ u}$.
- Unidad de masa atómica: $1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$.
- Resistividad del líquido intracelular: $\rho_a = 60 \text{ }\Omega \text{ cm}$.
- Longitud del axón: $L_a = 5 \text{ mm}$.

P3. Solución

- a) Con la expresión (1), calculamos el potencial de Nerst para cada ion:

$$V_{K^+} = \frac{RT}{eN_A} \ln \frac{[K^+]_{\text{ext}}}{[K^+]_{\text{int}}} = \frac{8,31 \times 310,15}{1,602 \times 10^{-19} \times 6,022 \times 10^{23}} \ln \left(\frac{5}{150} \right) = -91 \text{ mV}, \quad (4)$$

$$V_{Na^+} = \frac{RT}{eN_A} \ln \frac{[Na^+]_{\text{ext}}}{[Na^+]_{\text{int}}} = \frac{8,31 \times 310,15}{1,602 \times 10^{-19} \times 6,022 \times 10^{23}} \ln \left(\frac{145}{15} \right) = 61 \text{ mV}. \quad (5)$$

Sustituyendo el potencial de Nerst en la expresión (2) y teniendo en cuenta que el potencial en reposo es $V_0 = -70 \text{ mV}$, obtenemos el potencial efectivo para cada ion:

$$\boxed{V_{K^+}^{\text{eff}} = 21 \text{ mV}}, \quad (6)$$

$$\boxed{V_{Na^+}^{\text{eff}} = -131 \text{ mV}}. \quad (7)$$

Como el potencial efectivo para el K^+ es positivo, los iones K^+ experimentarán una fuerza que tiende a sacarlos de la célula. Para el Na^+ la situación es la contraria, al ser negativo el potencial efectivo, los iones de Na^+ tienden a entrar en la célula. Cuando se abran los canales iónicos, se producirá un flujo hacia afuera de iones de K^+ y un flujo hacia dentro de iones Na^+ .

- b) En el interior de la célula, el ion de K^+ está en reposo y, por tanto, sólo tiene energía potencial, $E_{p,\text{int}} = qV_{K^+}^{\text{eff}}$. Sin embargo, en el exterior de la célula el potencial es nulo, por lo que toda la energía potencial inicial se habrá convertido en energía cinética:

$$E_{p,\text{int}} = E_{c,\text{ext}} \rightarrow qV_{K^+}^{\text{eff}} = \frac{1}{2}mv^2, \quad (8)$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV_{K^+}^{\text{eff}}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1,602 \times 10^{-19} \times 0,021}{39 \times 1,66 \times 10^{-27}}} \rightarrow \boxed{v = 322,4 \text{ m/s}}. \quad (9)$$

- c) Al estar sometido a la fuerza eléctrica, el ion de K^+ describe un MRUA en el que la velocidad y la distancia recorrida (el radio r_a del axón) se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\left. \begin{array}{l} v = at \\ r_a = \frac{1}{2}at^2 \end{array} \right\} \rightarrow t = \frac{2r_a}{v} = \frac{2 \times 5 \times 10^{-6}}{322,4} \rightarrow \boxed{t = 31 \text{ ns}}. \quad (10)$$

- d) Podemos expresar la resistencia eléctrica como:

$$R_L = \rho_a \frac{L_a}{S_a}. \quad (11)$$

Considerando que el axón es un cilindro, la sección transversal en función del radio del axón vendrá dada por $S_a = \pi r_a^2$. Por tanto

$$\boxed{R_L = \rho_a \frac{L_a}{\pi r_a^2}}. \quad (12)$$

Sustituyendo en (12) los valores de los datos del problema,

$$R_L = 3,8 \times 10^7 \, \Omega = 38 \, \text{M}\Omega. \quad (13)$$

e) Sustituyendo en la expresión $\lambda = 1 / \sqrt{g_m R_L}$ el valor de R_L y g_m se obtiene

$$\lambda = 0,05 \, \text{cm}. \quad (14)$$

f) El trabajo realizado sobre un ión Na^+ para trasladarlo desde $x = 0$ hasta $x_m = 0,2 \, \text{cm}$ vendrá dado por

$$W = -q[V(x_m) - V(0)] = q(V_p - V_0)(1 - e^{-x_m/\lambda}) \rightarrow$$

$$W = 1,73 \times 10^{-20} \, \text{J}. \quad (15)$$

g) Obtenemos la expresión de la fuerza eléctrica a partir de la derivada del potencial,

$$F(x) = qE(x) = -q \frac{dV(x)}{dx} \rightarrow F(x) = \frac{q(V_p - V_0)}{\lambda} e^{-x/\lambda}. \quad (16)$$

h) Sustituyendo $x = 0$ en la expresión (16),

$$F(x=0) = \frac{q(V_p - V_0)}{\lambda} \rightarrow F(x=0) = 3,52 \times 10^{-17} \, \text{N}. \quad (14)$$