



Real
Sociedad
Española de
Física

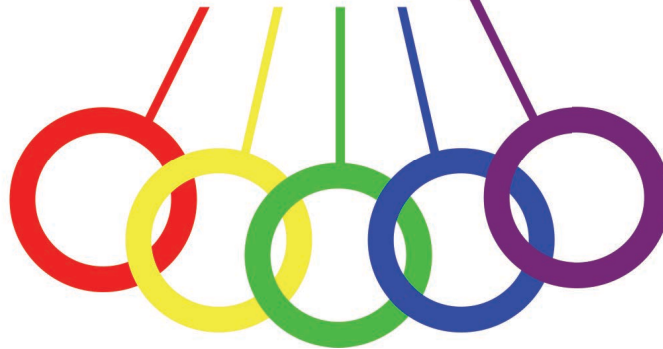


Universidad
Zaragoza

37 Olimpiada

*ESPAÑOLA DE
FÍSICA*

FASE DE ARAGÓN



1ª PRUEBA

13 de febrero de 2026



Departamento de
Física Aplicada
Universidad Zaragoza



Departamento de
Física de la
Materia Condensada
Universidad Zaragoza



GALACTICA



P1. El potito de Arquímedes.

Tus padres acaban de ser padres de nuevo, y llevas meses viendo cómo dedican noches sin descanso al cuidado del bebé. Como la buena persona que eres, propones a tus padres que se tomen un fin de semana para ellos, lo cual aceptan, no sin antes dejarte una lista detallada con los cuidados del bebé.

Ha llegado el momento, tus padres se han ido y te toca cuidar a tu hermanito Arquímedes durante una noche. Te levantas a las tres de la mañana, con un bebé hambriento, y la falta de sueño hace mella. Empiezas a ver el mundo con nuevos ojos, esto es más duro de lo que pensabas, tu cerebro apenas procesa, pero estás decidido a hacerlo bien. Según las instrucciones que han dejado tus padres, debes calentar un potito al baño maría, introduciéndolo en una cacerola llena de agua. Parece fácil, pero...

Vas a la nevera y sacas el potito que está en un tarro de cristal con forma **cilíndrica** de 7 cm de diámetro y 10 cm de altura. La báscula está sin pilas, así que asumes que pesa unos 300 g. Antes de empezar te preguntas: Si introduzco el potito en agua,

a) ¿qué volumen del tarro quedará por encima del nivel del agua?

Sigues leyendo y observas que tu madre ha escrito que tengas cuidado en no introducir los dedos en el agua hirviendo, para ello te recomienda aumentar la **densidad** del agua añadiendo sal de forma que así el potito sobresalga lo suficiente como para cogerlo de nuevo sin quemarte.

b) ¿Qué densidad tendría que tener el agua salada para que sobresalgan 3 cm del tarro por encima del nivel del agua?

Ahora sí, lo tienes todo calculado y te dispones a calentar el agua salada. Necesitas que el potito flote en la cacerola y su base no toque el fondo de la misma. Si tengo una cacerola de 16 cm de diámetro,

c) ¿cuál es el volumen **mínimo** de agua salada que debe tener la cacerola para que el tarro flote y su base no toque el fondo?

Como no habías estimado correctamente la masa del potito, el tarro sobresale por encima del nivel del agua salada más de lo que pensabas y has calentado agua de más, así que te dedicas a jugar con el tarro mientras se calienta. Intentas sumergirlo por debajo de su punto de equilibrio de flotación.

d) ¿Qué fuerza vertical tienes que hacer para que el tarro descienda 2 cm con respecto a la posición de equilibrio?

Una vez sumergido, lo sueltas y observas que describe un movimiento periódico (de ascenso y descenso). Si despreciamos el efecto del rozamiento del fluido (es decir, su viscosidad),

e) ¿Qué tipo de movimiento realiza el potito flotando en el agua? ¿Qué expresión usarías para obtener la frecuencia de oscilación?

Observas que el potito realiza 10 oscilaciones en 5 segundos.

f) ¿Cuál es la masa real del tarro?

Dato: Densidad del agua dulce $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$.

P1. Solución

- a) Para averiguar el volumen sumergido cuando flota en equilibrio, V_s , se iguala el empuje que actúa sobre el tarro con su peso.

$$\rho_{\text{agua}} V_s g = mg \Rightarrow V_s = \frac{m}{\rho_{\text{agua}}}$$

El volumen de tarro que emerge del agua, V_e , vendrá dado por la diferencia entre el volumen total, V , y el volumen sumergido,

$$V_e = V - V_s = \pi r^2 h - \frac{m}{\rho_{\text{agua}}} = \pi \times 0,035^2 \times 0,10 - \frac{0,30}{1000} \Rightarrow \boxed{V_e = 8,5 \times 10^{-5} \text{ m}^3}$$

- b) Para que sobresalgan 3 cm de altura tiene que haber bajo el agua una altura de tarro $h'_s = 7$ cm, con lo que el nuevo volumen sumergido en agua salada, V'_s , es

$$V'_s = \pi r^2 h'_s$$

La densidad del agua salada, $\rho_{\text{agua-sal}}$, se puede obtener igualando el empuje y el peso del tarro,

$$\rho_{\text{agua-sal}} V'_s g = mg$$

$$\rho_{\text{agua-sal}} = \frac{m}{V'_s} = \frac{m}{\pi r^2 h'_s} = \frac{0,30}{\pi \times (0,035)^2 \times 0,07} \Rightarrow \boxed{\rho_{\text{agua-sal}} = 1,11 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}$$

- c) Para que el tarro flote y su base no toque el fondo, el nivel de agua debe ser al menos igual a la altura sumergida del tarro en equilibrio. Si el nivel mínimo de agua es $H_{\text{min}} = 7$ cm, el volumen correspondiente esa altura sería $\pi r_{\text{cacerola}}^2 H_{\text{min}}$, una parte del cual está ocupado por el volumen sumergido del tarro V'_s . Por tanto, el volumen de agua mínimo necesario es

$$V_{\text{agua,min}} = \pi r_{\text{cacerola}}^2 H_{\text{min}} - V'_s = \pi (0,08)^2 \times 0,07 - 2,694 \times 10^{-4}$$

$$\boxed{V_{\text{agua,min}} = 1,14 \times 10^{-3} \text{ m}^3}$$

- d) Si el tarro desciende una distancia $\Delta x = 2$ cm = 0,02 m desde la posición de equilibrio, el empuje aumentará ΔE , proporcional al volumen ΔV sumergido. Para mantener el tarro hundido esa profundidad (en equilibrio estático), debemos aplicar una fuerza vertical hacia abajo igual a ese incremento de empuje,

$$F = \Delta E = \rho_{\text{agua-sal}} g \Delta V = \rho_{\text{agua-sal}} g \cdot A \Delta x = (1,11 \times 10^3) \times 9,81 \times (3,85 \times 10^{-4}) \times 0,02$$

$$\boxed{F = 0,84 \text{ N}}$$

- e) Al soltar el tarro, la diferencia entre el peso y el empuje actúa como fuerza recuperadora que trata de devolverlo a la posición de equilibrio. Tomando x como la posición del tarro respecto a dicha posición de equilibrio ($x > 0$ hacia abajo), la fuerza recuperadora será

$$F_r = -\rho_{\text{agua-sal}} g A x,$$

que es proporcional a x y de sentido contrario. Se puede comprobar que cuando el tarro esté una altura x por encima de la posición de equilibrio la fuerza está dirigida hacia abajo y tiene la misma

expresión. Así pues, se trata de una fuerza proporcional a la distancia, de la forma $F_r = -Kx$, que produce un Movimiento Armónico Simple (MAS) de frecuencia

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{\rho_{\text{agua-sal}} g A}{m}} \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_{\text{agua-sal}} g A}{m}}$$

f) El tarro realiza 10 oscilaciones en 5 s, por lo que.

$$f = \frac{10}{5} = 2 \text{ Hz} .$$

Despejando la masa a partir de la expresión obtenida en el apartado anterior, se obtiene que:

$$m = \frac{\rho_{\text{agua-sal}} g A}{4\pi^2 f^2} = \frac{(1,11 \times 10^3) \times 9,81 \times (3,85 \times 10^{-4})}{4\pi^2 \times 2^2}$$

$$m = 0,267 \text{ kg}$$

P2. Historia del estudio de los agujeros negros.

Los agujeros negros son cuerpos celestes cuya atracción gravitatoria es tan fuerte que ni siquiera la luz puede escapar de su interior. Aunque no fue hasta 1971 que se identificó al primero de ellos, Cygnus X-1, ya se había especulado sobre su existencia durante doscientos años.

En 1783 el astrónomo y clérigo inglés John Michell publicó un artículo sobre la posible existencia de «estrellas oscuras», tan masivas que la velocidad de escape desde su superficie superase la de la luz.

Suponiendo que la luz es una partícula con masa que cumple las leyes clásicas newtonianas, y que su velocidad inicial al emitirse en la superficie de la estrella es la velocidad de la luz en el vacío, c ,

- determina el radio de la esfera en la que tendría que comprimirse la masa del Sol para que la nueva velocidad de escape fuera c .
- Obtén la expresión de la distancia r_{\max} desde el centro de una estrella de masa M y radio R a partir de la cual ya no llegaría su luz.
- ¿Cuál es el radio mínimo R_{\min} que debe tener esa estrella de masa M para que la luz que emite pueda alcanzar a cualquier observador por muy lejos que esté?

La idea de los agujeros negros cayó en el olvido durante el siglo XIX con el desarrollo de las teorías ondulatorias de la luz. Si la luz era una onda sin masa, no parecía tener sentido plantearse que le afectara la gravedad newtoniana. Por lo que hubo que esperar a la teoría de la relatividad general para que la idea de las estrellas oscuras se transformase en la de los agujeros negros actuales.

En 2009 comenzó el proyecto del Telescopio del Horizonte de Eventos (EHT) con el objetivo de tomar la primera fotografía de un agujero negro, en concreto del disco de acreción que gira a su alrededor. Se eligió el agujero negro supermasivo M87*, situado a millones de años luz de la Tierra, y cuya masa es miles de millones de veces la masa del Sol.

Según la relatividad general, el tamaño del horizonte de eventos de un agujero negro estacionario, frontera a partir de la cual ni siquiera la luz puede escapar, viene dado por el radio de Schwarzschild,

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}.$$

Además, la masa del agujero negro curva la trayectoria de la luz que pasa cerca de él, efecto llamado *lente gravitacional*, que hace que M87* se vea más grande de lo que en realidad es. Por ello, el disco del agujero negro M87* (Figura 1) aparenta un radio $r_{\text{aparente}} = 2,6r_s$.



Figura 1: Imagen de M87* obtenida por el EHT y publicada en 2019.

- Determina el diámetro angular del disco (ángulo subtendido por el disco) visto desde la Tierra.
- Calcula el diámetro de un objeto circular que abarque el mismo diámetro angular visto desde la Tierra, pero que esté situado en la superficie de la Luna.

El Telescopio del Horizonte de Eventos (EHT) no es un único telescopio, sino una red global de radiotelescopios que utiliza interferometría de muy larga base (VLBI) observando la banda de longitud de onda $\lambda = 1,3$ mm. Utilizando dicha técnica, la resolución angular (diámetro angular mínimo distinguible) que se obtiene mediante dos telescopios separados una distancia D viene determinada por λ/D .

- f) Calcula la distancia mínima que debe haber entre dos telescopios para poder resolver el disco de acreción de M87*.

Datos:

Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Radio del Sol	$R_{\odot} = 6,95 \times 10^8 \text{ m}$
Velocidad de escape desde la superficie del Sol	$v_{\odot} = 618 \text{ km/s}$
Distancia Tierra-Luna	$d_{T-L} = 3,80 \times 10^5 \text{ km}$
Constante de gravitación universal	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
Masa del agujero negro M87*	$M_{M87*} = 10^{40} \text{ kg}$
Distancia Tierra-M87*	$d_{T-M87*} = 53,5 \times 10^6 \text{ años-luz}^{(1)}$

⁽¹⁾ Un año-luz es la distancia recorrida por la luz en 1 año.

P2. Solución

- a) La velocidad de escape de la superficie del Sol se puede obtener a partir de la conservación de energía, considerando un cuerpo de masa m que parte de la superficie del Sol con velocidad v_{\odot} y llega al infinito sin velocidad,

$$\frac{1}{2}mv_{\odot}^2 - G\frac{M_{\odot}m}{R_{\odot}} = 0$$

de donde se deduce

$$v_{\odot} = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}},$$

expresión que no depende de la masa m del cuerpo. Para que una esfera de radio R_N y la misma masa del Sol tenga una velocidad de escape igual a la de la luz, c , se deberá cumplir

$$c = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_N}}$$

Elevando ambas expresiones al cuadrado y dividiendo se obtiene

$$\frac{v_{\odot}^2}{c^2} = \frac{R_N}{R_{\odot}} \Rightarrow R_N = R_{\odot} \frac{v_{\odot}^2}{c^2} = 6,95 \times 10^8 \frac{(6,18 \times 10^5)^2}{(3,0 \times 10^8)^2} \Rightarrow$$

$$R_N = 2,95 \times 10^3 \text{ m} = 2,95 \text{ km}$$

- b) Teniendo en cuenta que la partícula emitida desde la superficie de la estrella con velocidad c se detiene a una distancia r_{\max} , se plantea nuevamente la conservación de energía,

$$\frac{1}{2}mc^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r_{\max}}$$

de donde se puede despejar r_{\max} ,

$$r_{\max} = \frac{R}{1 - \frac{2GM}{c^2R}}$$

- c) Para que la luz emitida por la estrella pueda llegar a cualquier observador, la velocidad límite debe ser menor que la de la luz, por lo que el radio mínimo vendrá determinado por

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_{\min}}} \Rightarrow R_{\min} = \frac{2GM}{c^2}$$

Este valor también puede deducirse a partir de la expresión de r_{\max} deducida en el apartado anterior, donde se observa que la distancia máxima aumenta cuando se incrementa R , y se hace infinita cuando el denominador se anula, lo que corresponde para el mismo valor de R_{\min} . La dependencia de r_{\max} con R se representa en la figura 2.

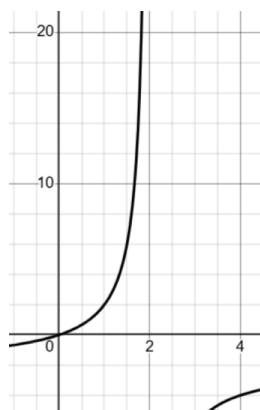


Figura 2: Gráfica de r_{\max} frente a R en unidades de GM/c^2

d) El radio aparente del disco de M87* es

$$r_{\text{aparente}} = 2,6 \frac{2GM_{M87^*}}{c^2} = 2,6 \frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 10^{40}}{(3,00 \times 10^8)^2} = 3,85 \times 10^{13} \text{ m}$$

Debemos expresar también la distancia entre la Tierra y M87* en metros,

$$d_{T-M87^*} = 53,5 \times 10^6 \times 3,00 \times 10^8 \times 365 \times 24 \times 3600 = 5,06 \times 10^{23} \text{ m}$$

El diámetro angular δ se obtiene a partir del radio aparente r_{aparente} y la distancia desde la Tierra a M87*, d_{T-M87^*} , utilizando la construcción que se muestra en la figura 3.

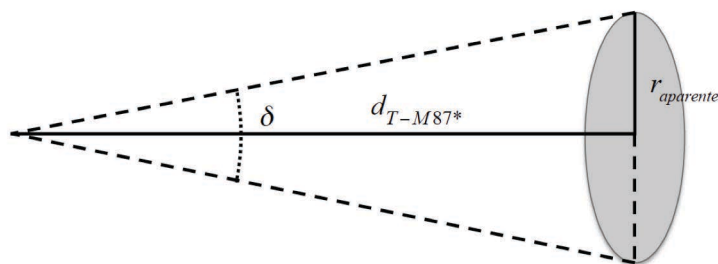


Figura 3: Diámetro angular δ .

Así,

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{r_{\text{aparente}}}{d_{T-M87^*}}$$

Cuando la distancia es muy grande, el diámetro angular es muy pequeño, por lo que, si expresamos δ en radianes, podemos aproximar $\text{tg}(\delta/2) \approx \delta/2$, de modo que

$$\delta = \frac{2r_{\text{aparente}}}{d_{T-M87^*}} = \frac{2 \times 3,85 \times 10^{13}}{5,06 \times 10^{23}} \Rightarrow$$

$$\delta = 1,52 \times 10^{-10} \text{ rad} = 31,4 \text{ microsegundos de arco}$$

- e) El radio r' de un objeto sobre la superficie de la Luna que se observaría desde la Tierra con el mismo diámetro angular vendrá dado por

$$r' = \frac{\delta \cdot d_{T-L}}{2} = \frac{1,52 \times 10^{-10} \times 3,80 \times 10^8}{2} = 0,0289 \text{ m}$$

Por lo que el diámetro del objeto, d' , sería

$$d' = 2r' = 0,0578 \text{ m} = 5,78 \text{ cm}$$

El diámetro angular del agujero negro visto desde la Tierra es aproximadamente el de una pelota de tenis en la superficie de la Luna.

- f) A partir de la resolución angular del sistema de telescopios, $\delta = \lambda/D$, podemos despejar la distancia mínima entre telescopios para resolver el diámetro del disco de M87*,

$$D = \frac{\lambda}{\delta} = \frac{1,3 \times 10^{-3}}{1,52 \times 10^{-10}} \Rightarrow D = 8,55 \times 10^6 \text{ m} = 8550 \text{ km}$$

El Telescopio del Horizonte de Eventos (EHT) está compuesto por una red global de ocho radioobservatorios distribuidos por todo el planeta, incluyendo la Antártida, Chile, Hawái, Europa, México y Estados Unidos. Esta red funciona como un telescopio virtual cuya distancia máxima entre observatorios es comparable al diámetro de la Tierra, de aproximadamente 12.000 km.

Con el objetivo de aumentar la resolución del EHT, se están realizando pruebas con longitudes de onda de 0,87 mm, aunque hasta el momento no se han obtenido imágenes. Recientemente, se ha propuesto la instalación de telescopios en la Luna, sincronizados con los de la Tierra, lo que supondría un reto científico y tecnológico de gran envergadura, del que quizá formen parte en el futuro los participantes en esta Olimpiada.

P3. Nanopartículas.

El uso de nanopartículas en medicina cada vez es más popular. Debido a su pequeño tamaño, son capaces de introducirse dentro de las células, pudiendo así usarse para una amplia gama de aplicaciones. Por ejemplo, el tratamiento eficaz del cáncer es uno de los problemas más importantes de la medicina moderna, donde las terapias convencionales, como la quimioterapia, conllevan una gran cantidad de efectos secundarios. El uso de nanopartículas abre la posibilidad de tratamientos menos invasivos y más específicos.

En este contexto, las propiedades de las nanopartículas son esenciales para lograr una terapia efectiva, por lo que la caracterización de las mismas es de gran interés.

Imaginemos que una empresa ha fabricado una partícula esférica de masa $M = 5 \text{ fg}$ ($1 \text{ fg} = 10^{-15} \text{ g}$) y nos piden caracterizarla. La empresa desea saber su carga eléctrica y su radio. Para ello, adherimos las partículas a una placa vertical en un medio acuoso y aplicamos una diferencia de potencial $V = 6,25 \text{ mV}$ entre dicha placa y otra placa adyacente, separada de la primera una distancia $L = 10 \text{ cm}$ (figura 1). Las nanopartículas son aceleradas (con un rozamiento despreciable) de la placa con menor potencial a la de mayor potencial. Se detecta que alcanzan la otra placa en un tiempo $t = 1 \text{ s}$. El campo eléctrico entre las placas es uniforme.

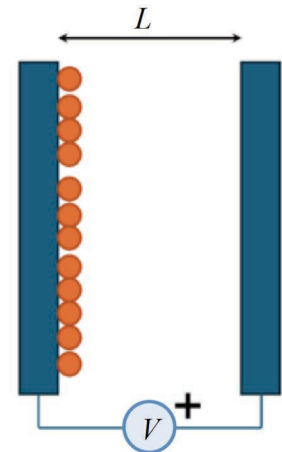


Figura 1

a) ¿Qué aceleración han sufrido?

b) ¿Qué carga tienen? Indícala en unidades de carga elemental del electrón.

Después de hacer el experimento, caemos en la cuenta de que los medios donde se transportan las nanopartículas son medios salinos, que contienen iones libres positivos y negativos. Por tanto, las nanopartículas tienden a rodearse de una capa de iones de signo contrario (figura 2) que acaba por apantallar su verdadera carga (su carga aparente es menor a la real). Es necesario por tanto reproducir estas condiciones en nuestro experimento. Para ello se repite el experimento en un medio salino y se registra esta vez un tiempo $t' = 1,118 \text{ s}$.

c) ¿Qué porcentaje de la carga está apantallada?

En su recorrido de una placa a otra las nanopartículas arrastrarán esa capa de iones consigo, y, por tanto, su radio en movimiento (radio hidrodinámico) será mayor que el real. Otro grupo de investigadores, usando un microscopio de alta precisión, ha medido el radio real de la partícula, resultando $R = 95 \text{ nm}$.

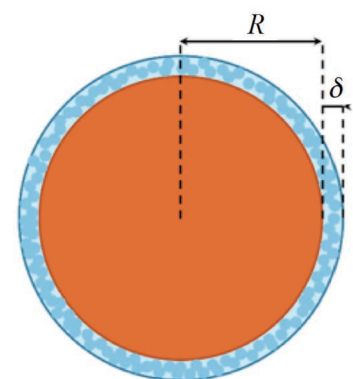


Figura 2

La concentración media de carga que se crea alrededor de cada nanopartícula en el medio salino es $\rho = 33500 \text{ e}^- / \mu\text{m}^3$.

d) ¿Cuál es el espesor de carga δ que rodea a la nanopartícula? ¿Cuál es el radio hidrodinámico que tiene la nanopartícula en el medio salino?

Un aspecto crucial en la fabricación de nanopartículas es determinar su estabilidad en solución, es decir, determinar si las nanopartículas se unirán entre sí formando agregados (inestables) o permanecerán separadas entre sí (estables). Si se tiene en cuenta solo la repulsión electrostática¹, todas las partículas cargadas serían estables ya que se repelerían entre sí. Sin embargo, existe una serie de interacciones atractivas débiles,

¹ La fuerza de Coulomb entre dos cargas q y q' en agua es 80 veces más pequeña que en el vacío.

denominadas interacciones de Van der Waals (VdW), que se producen entre todo tipo de partículas y moléculas, independientemente de su carga eléctrica. Asumiendo que las partículas son puntuales, la fuerza de VdW es $F_{VdW} = B / r^7$, siendo $B = 10^{-14} \text{ N} \cdot \text{nm}^7$ y r la distancia entre ellas.

Considera dos nanopartículas con la **carga apantallada**, separadas una distancia $r = 10R$.

e) ¿Se pueden considerar estables?

f) ¿Cuál es la distancia límite a la que se pueden acercar para asegurar su estabilidad?

Después de llevar a cabo los cálculos, nos ponemos exquisitos y consideramos que realmente las nanopartículas no se comportan de forma puntual. Considerando el tamaño finito de la nanopartícula, se pueden aproximar las interacciones que regulan su estabilidad usando las siguientes expresiones:

$$F_{\text{atracción}}(r) = \frac{A \cdot R}{12r^2} \qquad F_{\text{repulsión}}(r) = \frac{R \cdot Z}{2l_D} e^{-\frac{r}{l_D}}$$

Donde cada magnitud corresponde a:

R : Radio de la partícula.

r : Distancia entre las superficies de las partículas que interactúan.

A : Constante que regula la intensidad de las fuerzas de VdW.

Z : Constante que regula la intensidad de las fuerzas electrostáticas de repulsión.

l_D : Longitud característica de Debye, que depende de las condiciones del medio.

g) Obtén una condición que permita determinar la estabilidad de las nanopartículas, en función de las constantes que regulan las interacciones (A , Z y l_D)

Ayuda:

- Describe la condición de estabilidad mediante una desigualdad.
- Determina el valor máximo de la función $r^2 e^{-\frac{r}{l_D}}$ en función de r (en la figura 3 puedes ver que solo hay un máximo). Esto te permitirá obtener la condición de estabilidad considerando el peor caso posible, y finalmente eliminar la variable distancia r .

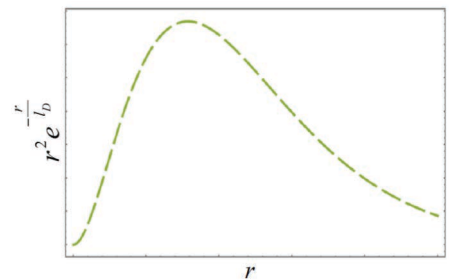


Figura 3

Dato: Carga del electrón $e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

P3. Solución

- a) Dado que el campo entre las placas es uniforme, la fuerza a la que están sometidas las nanopartículas en su trayecto entre placas es constante, por lo que describen un movimiento uniformemente acelerado. Por tanto,

$$L = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2L}{t^2} = \frac{2 \times 0,1}{1^2} \Rightarrow \boxed{a = 0,2 \text{ m/s}^2}$$

- b) El campo eléctrico en el interior de las placas será

$$E = \frac{V}{L}$$

La fuerza que experimenta la nanopartícula es $F = Q \cdot E$. Aplicando la segunda ley de Newton,

$$M \cdot a = Q \cdot E = Q \frac{V}{L} \Rightarrow Q = \frac{M \cdot a \cdot L}{V} = \frac{5 \times 10^{-18} \times 0,2 \times 0,1}{6,25 \times 10^{-3}} = 1,6 \times 10^{-17} \text{ C}$$

Como las nanopartículas van hacia la placa de mayor potencial, la carga debe ser de signo negativo, de modo que

$$\boxed{Q = -1,6 \times 10^{-17} \text{ C} = 100e^-}$$

- c) Operando de la misma forma que en los apartados a) y b), la aceleración en medio salino vendrá dada por

$$a' = \frac{2L}{t'^2} = \frac{2 \times 0,1}{1,118^2} = 0,16 \text{ m/s}^2$$

y la carga total será

$$Q' = -\frac{M \cdot a' \cdot L}{V} = -\frac{5 \times 10^{-15} \times 0,16 \times 0,1}{6,26 \times 10^{-3}} = -1,28 \times 10^{-17} \text{ C} = 80e^-$$

El porcentaje de carga apantallada será

$$\%_Q = \frac{Q - Q'}{Q} \times 100 = \frac{100e^- - 80e^-}{100e^-} \times 100 \Rightarrow \boxed{\%_Q = 20 \%}$$

- d) El volumen de la capa de apantallamiento vendrá dado por

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi[(R + \delta)^3 - R^3]$$

Dado que la carga de la capa de apantallamiento es $\Delta Q = Q - Q' = 20e^-$, se tiene

$$\Delta Q = \rho \Delta V \Rightarrow 20e^- = \rho \frac{4}{3}\pi[(R + \delta)^3 - R^3] \Rightarrow$$

$$\delta = \sqrt[3]{R^3 + \frac{3}{4\pi\rho} 20e^-} - R = \sqrt[3]{(9,5 \times 10^{-8})^3 + \frac{3}{4\pi \cdot 3,35 \times 10^{22}} 20 - 9,5 \times 10^{-8}}$$

$$\boxed{\delta = 5 \times 10^{-9} \text{ m} = 5 \text{ nm}}$$

El radio hidrodinámico será

$$\boxed{R + \delta = 100 \text{ nm}}$$

e) Para $r = 10R$ se tiene, en unidades S.I.,

$$F_{VdW} = \frac{B}{r^7} = \frac{10^{-77}}{(10 \times 9,5 \times 10^{-8})^7} = 1,43 \times 10^{-35} \text{ N}$$

$$F_C = \frac{k Q^2}{80 r^2} = \frac{9 \times 10^9 (1,28 \times 10^{-17})^2}{80 (10 \times 9,5 \times 10^{-8})^2} = 2,04 \times 10^{-14} \text{ N}$$

Como $F_{VdW} \ll F_C$, la fuerza atractiva es mucho menor que la repulsiva, por lo que las nanopartículas son estables.

f) Para obtener la distancia límite a la que se pueden acercar se igualan la fuerza de VdW y la electrostática,

$$\frac{B}{r_{\min}^7} = \frac{k Q^2}{80 r_{\min}^2} \Rightarrow$$

$$r_{\min} = \sqrt[5]{\frac{80B}{kQ^2}} = \sqrt[5]{\frac{80 \times 10^{-77}}{9 \times 10^9 \times (1,28 \times 10^{-17})^2}} = 5,58 \times 10^{-11} \text{ m} = 0,0558 \text{ nm} .$$

Como $r_{\min} < R$, las nanopartículas serán estables a cualquier distancia.

g) Para que haya estabilidad, las fuerzas repulsivas deben ser iguales o superiores a las de atracción. Como indica la ayuda 1, se tiene una desigualdad,

$$\frac{A \cdot R}{12r^2} \leq \frac{R \cdot Z}{2l_D} e^{-\frac{r}{l_D}}$$

Se reordena la expresión para poder hacer uso de la ayuda 2,

$$\frac{A \cdot l_D}{12Z} \leq r^2 e^{-\frac{r}{l_D}}$$

Se busca el máximo de la función de la parte derecha. Para ello es necesario conocer la derivada de la función,

$$\frac{d}{dr} (r^2 e^{-\frac{r}{l_D}}) = 2r e^{-\frac{r}{l_D}} - \frac{r^2}{l_D} e^{-\frac{r}{l_D}} = \left(2 - \frac{r}{l_D}\right) r e^{-\frac{r}{l_D}}$$

El valor de r que maximiza la ecuación, r_{\max} corresponde al valor donde se hace cero la derivada.

Tal y como se ve en la gráfica de la figura 2, solo hay un máximo,

$$\left(2 - \frac{r_{\max}}{l_D}\right) r_{\max} e^{-\frac{r_{\max}}{l_D}} = 0 \Rightarrow 2 - \frac{r_{\max}}{l_D} = 0 \Rightarrow r_{\max} = 2l_D$$

Finalmente, se sustituye en la desigualdad para obtener la condición de estabilidad,

$$\frac{Ae^2}{24l_D Z} \leq 1$$

Como indicaba la ayuda, se obtiene una condición de estabilidad independiente de la distancia r .