REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA

XIX Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

SEGUNDA PRUEBA

29 de febrero de 2008

INSTRUCCIONES:

Esta prueba consiste en la resolución de un problema de tipo experimental

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

iberCaja

CAESARAVGVSTANAE † STVDIVM GENERALE CIVITATIS

Problema Experimental. *Pesando un electrón*

1) Fundamento teórico

La masa de un electrón es muy pequeña, $m_e \sim 10^{-30}$ kg, por lo que es imposible medirla con una balanza convencional. Para determinarla experimentalmente puede recurrirse a la vieja y conocida segunda ley de Newton: si se hace actuar una fuerza F conocida sobre una partícula y se mide la aceleración con que se mueve, a, la masa de la partícula puede deducirse como

$$m = \frac{F}{a}$$

En el caso del electrón, si se supone conocida su carga $q_e = -e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$, un posible método para determinar su masa m_e es observar la trayectoria que describe cuando penetra con velocidad $\vec{v}$ en una región del espacio donde existe un campo magnético $\vec{B}$. Como bien sabrás, la fuerza que actúa sobre el electrón (fuerza de Lorentz) es

$$\vec{F} = -e\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Esta fuerza es perpendicular a $\vec{v}$, de forma que la aceleración que produce es puramente centrípeta, es decir cambia la dirección de $\vec{v}$ pero no su módulo v. En particular, si $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares y $\vec{B}$ es uniforme, la trayectoria del electrón es circular (figura 1) y se cumple

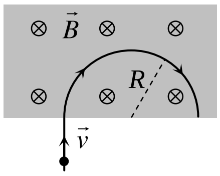

Fig. 1

$$m_e = \frac{F}{a} = \frac{e\,v\,B}{v^2/R} = \frac{e\,B\,R}{v} \qquad (1)$$

donde R es el radio de la trayectoria.

Para acelerar el electrón hasta la velocidad v puede emplearse el campo eléctrico producido por dos electrodos entre los que se establece una diferencia de potencial V (cañón de electrones). Supuesto que los electrones parten del reposo, su velocidad final v puede determinarse planteando la conservación de la energía mecánica.

$$eV = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad \rightarrow \quad v = \left(\frac{2eV}{m_e} \right)^{1/2} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) y despejando m_e se obtiene

$$m_e = \frac{e\,B^2 R^2}{2V} \qquad (3)$$

Para producir un campo magnético uniforme pueden emplearse un par de bobinas en montaje de Helmholtz[1], que crean un campo proporcional a la corriente I que circula por ellas. Llamando k a la constante de proporcionalidad

$$B = k\,I \qquad (4)$$

En total, (3) puede escribirse

$$m_e = \frac{e\,k^2}{2} \frac{I^2}{V} R^2 \qquad (5)$$

En resumen, para determinar m_e es necesario conocer la constante k de las bobinas y medir el radio R de la trayectoria de los electrones para valores conocidos de I y V.

En la fotografía de la figura 2 se muestra un montaje real para realizar este experimento[2]. Se observan dos fuentes de alimentación, para el cañón de electrones y para las bobinas, que permiten regular y medir V e I respectivamente. El cañón de electrones se encuentra en el interior de un bulbo esférico de vidrio con gas Ar a baja presión en su interior. Los electrones excitan por colisiones los átomos de Ar que encuentran a su paso, y éstos se desexcitan emitiendo fotones de luz visible, de forma que se visualiza la trayectoria circular de los electrones y se puede medir su radio con una simple regla.

[1] Se demuestra que dos espiras circulares situadas en planos paralelos, por las que circula la misma corriente y separadas una distancia igual a su radio (montaje de Helmholtz), producen un campo magnético aproximadamente uniforme en un volumen relativamente amplio en torno al centro geométrico del sistema.

[2] Esta práctica se realiza en la asignatura "Laboratorio de Física" de primer curso de Físicas en la Universidad de Zaragoza.

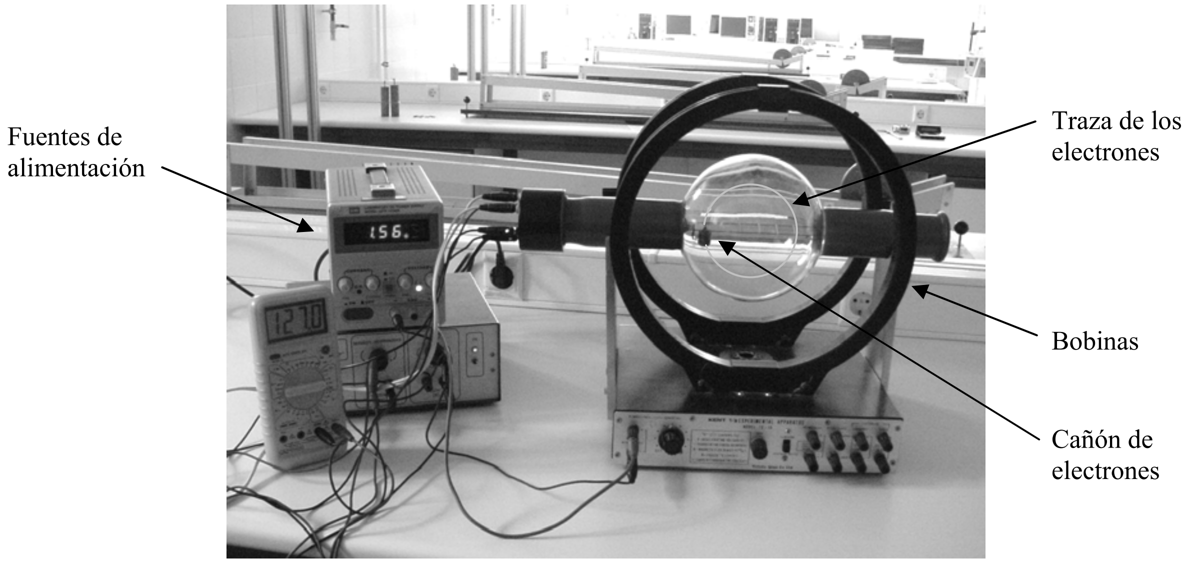

Fig. 2

2) Datos experimentales.

Para calibrar las bobinas, es decir para determinar su constante k, se mide con un teslámetro el campo magnético B que crean en su centro en función de la intensidad I con que se alimentan. En la tabla I se presentan estas medidas.

Tabla I. Calibrado de las bobinas.

I **(A)**	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
B **(mT)**	0,14	0,34	0,47	0,58	0,76	0,95	1,12	1,19	1,43	1,49

El cañón de electrones opera con una tensión aceleradora constante $V = 150$ V. Para diversos valores de la corriente I que circula por las bobinas se mide el radio R de la trayectoria de los electrones. Los resultados se presentan en la tabla II.

Tabla II. Radios de curvatura en función de *I*.

I **(A)**	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10
R **(cm)**	9,1	7,5	6,6	6,0	5,3	4,8

3) Tareas y preguntas.

a) Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales $(x, y) = (I, B)$ de la tabla I.

b) Ajusta estos puntos experimentales a una línea recta.

c) Determina el valor de la constante de calibración de las bobinas, k.

d) Haz una estimación de la incertidumbre (margen de error) de k.

e) Determina la masa de un electrón, m_e.

f) En este experimento se realizan medidas directas y determinaciones indirectas de diversas variables. La incertidumbre de cada una de ellas influye en el margen de error de la masa del electrón. Suponiendo que la principal fuente de error es la determinación de la constante k de las bobinas, haz una estimación de la incertidumbre de m_e.

a) En la figura 3 se presenta la gráfica pedida, con un aspecto similar al que tendría dibujada en papel milimetrado.

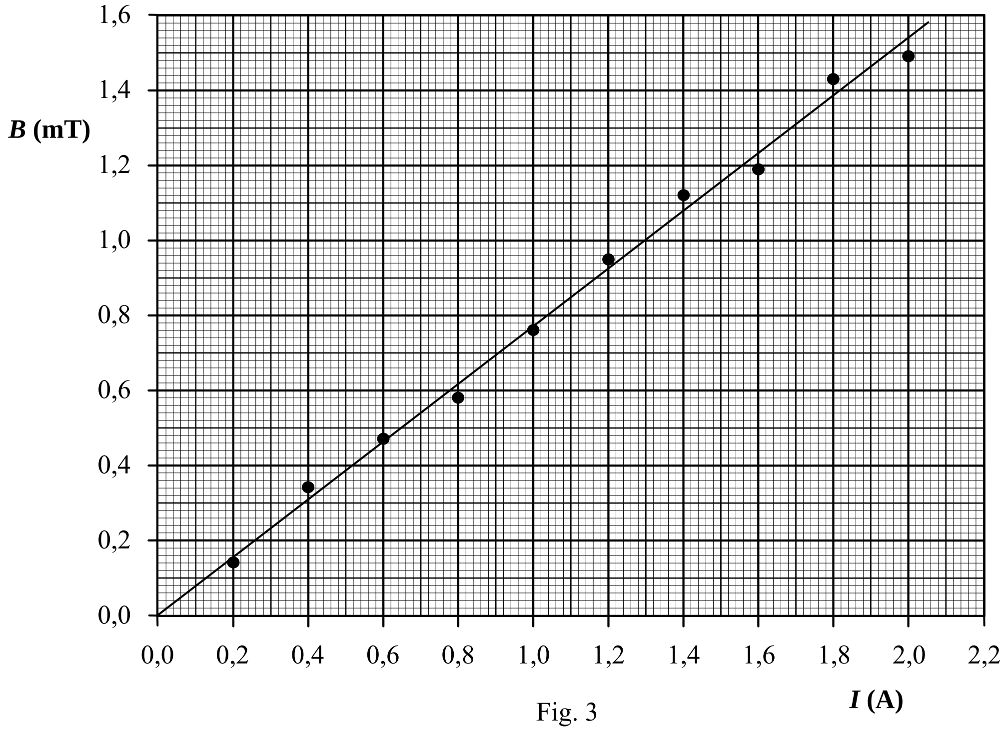

Fig. 3

b) En la misma gráfica se ha trazado con una regla la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales. Esta recta, de acuerdo con lo previsto en (4), pasa por el origen. Por tanto, para determinar su pendiente basta con tomar un punto de la recta alejado del origen. Por ejemplo, para I = 2 A el campo indicado por la recta es B = 1,54 mT, de forma que la pendiente es[1]

$$p = \frac{1{,}54 \text{ mT}}{2{,}0 \text{ A}} = 7{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ T/A}$$

c) Según (4), la constante de calibración de las bobinas, k, coincide con la pendiente de la recta anterior, es decir

$$\boxed{k = 7{,}7 \cdot 10^{-4} \text{ T/A}}$$

d) Puede hacerse una estimación de la incertidumbre de k trazando las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales. A la hora de trazar estas dos rectas sería conveniente tener en cuenta la incertidumbre de los propios puntos experimentales (barras de error). Como no se da ningún dato en el enunciado sobre estas incertidumbres, puede recurrirse a observar la dispersión de los datos experimentales respecto a la mejor recta para decidir las de máxima y mínima pendiente.

En la figura 4 se presenta una estimación gráfica de estas rectas, con pendientes

$$k_{\text{max}} = \frac{1{,}58 \text{ mT}}{2{,}0 \text{ A}} = 7{,}9 \cdot 10^{-4} \text{ T/A}, \qquad k_{\text{min}} = \frac{1{,}50 \text{ mT}}{2{,}0 \text{ A}} = 7{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ T/A}$$

Por tanto, una estimación razonable de la incertidumbrede k sería[2]

$$\Delta k = \frac{k_{\text{max}} - k_{\text{min}}}{2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\Delta k = 0{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ T/A}}$$

---

[1] Un cálculo analítico empleando el método de mínimos cuadrados conduce a una pendiente $p = 7{,}686 \cdot 10^{-4}$ T/A.

[2] Cálculos estadísticos que no detallamos aquí conducen a que el *error típico* de k es $0{,}09 \cdot 10^{-4}$ T/A, y a que su incertidumbre es de $0{,}20 \cdot 10^{-4}$ T/A, con un nivel de confianza del 95%.

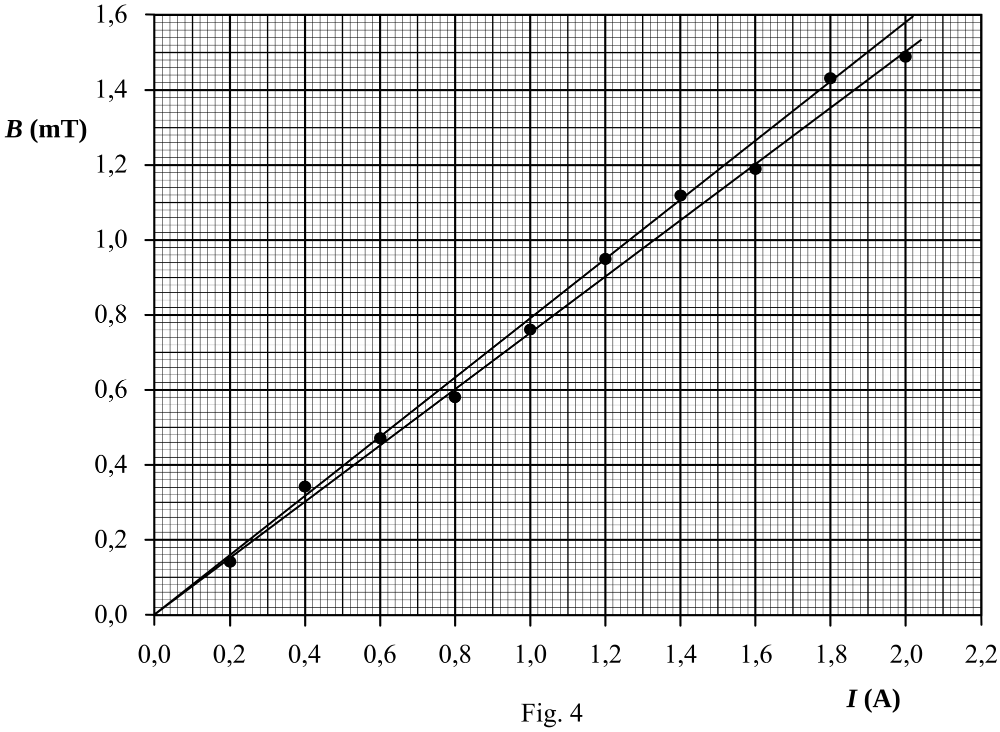

Fig. 4

e) Conocidas la constante de calibración de las bobinas, *k*, y la tensión aceleradora del cañón de electrones, V = 150 V, basta aplicar (5) para calcular m_e con cada pareja de valores (I, R) de la tabla II. Se obtienen los siguientes seis valores:

m_e (10^{-31} kg)	9,43	8,72	8,82	9,22	8,88	8,82

Obviamente, el mejor valor final para la masa del electrón es el promedio de los seis anteriores:

$$\boxed{m_e = 8,98 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}$$

No tiene sentido dar este resultado con más de tres cifras significativas, pues casi todos los datos de la tabla II tienen dos cifras significativa y el número de medidas no es suficientemente elevado como para mejorar mucho esta precisión.

f) Operando en (5) con los valores máximo y mínimo estimados para *k* se obtienen los correspondientes valores máximo y mínimo de m_e

$$m_{\text{max}} = 9,45 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\,, \quad m_{\text{min}} = 8,52 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

Por tanto, la incertidumbre transmitida a m_e es

$$\boxed{\Delta m_e = 0,5 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}$$

Nótese que se ha redondeado esta incertidumbre a una única cifra significativa, puesto que se trata de una estimación.

Esta incertidumbre puede calcularse de una forma matemáticamente más elegante, aunque no más exacta. La dependecia (5) de m_e con k es cuadrática, luego su incertidumbre relativa se propaga duplicada, como puede comprobarse inmediatamente tomando incrementos en (5)

$$m_e = \alpha k^2 \quad \rightarrow \quad \Delta m_e = 2\alpha k \Delta k \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta m_e}{m_e} = 2\frac{\Delta k}{k} = 0,052 \quad \rightarrow \quad \Delta m_e = 0,5 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$

Con esta incertidumbre no tiene sentido dar m_e con más de dos cifras significativas, por lo que el resultado de la "pesada" sería

$$m_e = (9,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$$