Real Sociedad Española de Física

R.S.E.F.

CIENCIAS ZARAGOZA

Universidad de Zaragoza

XX Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

FASE DE ARAGÓN

PRIMERA PRUEBA

27 de febrero de 2009

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas

Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

cofis Colegio Oficial de Físicos

iberCaja Obra Social

Subvenciona:

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

P1.- Velocidad de caída en un plano inclinado.

La fotografía de la figura muestra un antiguo plano inclinado de ángulo variable que se utilizó a principios del siglo XX en la Facultad de Ciencias de Zaragoza. Forma parte de la exposición permanente *INSTRUMENTA* que se encuentra en dicha Facultad.

a) Con el plano en posición horizontal, se coloca sobre él un bloque cúbico ligero de arista $b = 7{,}00\,\text{cm}$ y masa $M = 125\,\text{g}$. A continuación se va inclinando el plano hasta que, para un ángulo $\alpha_0 = 23{,}8\,°$, el bloque comienza a deslizar.

Calcula el coeficiente de rozamiento estático μ_e entre el bloque y el plano.

b) A continuación, con un ángulo $\alpha = 30{,}0\,°$, se coloca el bloque en el extremo superior del plano inclinado y se abandona sin velocidad inicial. Sabiendo que la longitud del plano es $L = 85{,}0\,\text{cm}$, que el coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_c = \mu_e / 3$ y sin tener en cuenta la fuerza de resistencia del aire,

b_1) Obtén la expresión de la velocidad V_F con que llega el bloque a su extremo inferior y calcula su valor.

b_2) ¿Cuánta energía mecánica del bloque se ha disipado en forma de calor en este proceso?

c) En este apartado se va a considerar además la fuerza de resistencia F_r que el aire ejerce sobre el bloque. Esta fuerza, que se opone al movimiento, depende de la velocidad *v* del bloque, en la forma:

$$F_r = \frac{1}{2}\rho C S v^2$$

Donde $\rho = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$ es la densidad del aire, *S* es la superficie frontal del bloque ($S = b^2$) y *C* es un coeficiente que depende de la forma del objeto que se mueve. En el caso de un bloque cúbico, $C = 1{,}10$.

c_1) Escribe la ecuación de la aceleración del bloque en su movimiento por el plano.

c_2) Representa gráficamente la aceleración *a* del bloque en función de su velocidad *v*, desde $v = 0$ hasta una velocidad de 12 m/s.

c_3) Justifica que el bloque aumenta su velocidad hasta llegar a un valor V_L constante que se denomina *velocidad límite*. Determina la expresión de V_L y calcula su valor.

c_4) La longitud *L* del plano inclinado ¿es suficiente para que la velocidad del bloque llegue a aproximarse a la velocidad límite? Razona tu respuesta.

P1.- Velocidad de caída en un plano inclinado.

Solución

a) En la figura 1 se representan las fuerzas exteriores que actúan sobre el bloque. En el equilibrio se cumple

$$N = Mg\cos\alpha_0 \quad \text{y} \quad (F_r)_{\text{est}} = Mg\,\text{sen}\,\alpha_0$$

En el límite de equilibrio la fuerza de rozamiento alcanza su valor máximo que es $(F_r)_{est} = \mu_e N$, por lo que

$$\mu_e Mg\cos\alpha_0 = Mg\,\text{sen}\,\alpha_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_e = \text{tg}\,\alpha_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_e = 0{,}441}$$

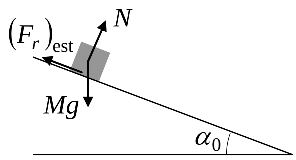

Fig. 1

b) b₁) Cuando se abandona el bloque desde la parte superior del plano inclinado con un ángulo $\alpha > \alpha_0$, el bloque desliza. Para calcular la velocidad con la que llega a la base, tenemos en cuenta que la variación de la energía mecánica del bloque entre el estado final y el inicial tiene que ser igual al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento que es disipativa (no conservativa), esto es

$$\frac{1}{2}M V_F^2 - MgL\text{sen}\,\alpha = -\mu_c\, MgL\cos\alpha \qquad (1)$$

En donde se ha tomado como nivel de energía potencial gravitatoria la base del plano y como coeficiente de rozamiento el cinético.

De (1) se deduce que

$$\boxed{V_F = \sqrt{2gL(\text{sen}\,\alpha - \mu_c\cos\alpha)}}$$

Como, según el enunciado $\mu_c = \mu_e/3 = 0{,}147$, el valor de la velocidad final es $\boxed{V_F = 2{,}49\,\text{m/s}}$

b₂) La energía mecánica que se ha disipado es igual al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento

$$\Delta E = \mu_c\, MgL\cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta E = 0{,}133\ \text{J}}$$

c) c₁) Llamando *a* a la aceleración con la que desliza el bloque, la segunda ley de Newton aplicada en la dirección del plano y teniendo en cuenta que además del rozamiento actúa la fuerza de resistencia con el aire, nos permite escribir

$$a = g\text{sen}\,\alpha - \mu_c\, gL\cos\alpha - \frac{1}{2M}\rho C S v^2 \qquad (2)$$

c2) Si llamamos $a_0 = g\text{sen}\,\alpha - \mu_c\, gL\cos\alpha$ y $b = \dfrac{1}{2M}\rho C S$, la ecuación (2) toma la forma

$$a = a_0 - b v^2$$

Con los datos del enunciado, $a_0 = 3{,}65\ \text{m/s}^2$ y $b = 2{,}78\cdot 10^{-2}\ \text{m}^{-1}$, la representación gráfica es la de la figura 2.

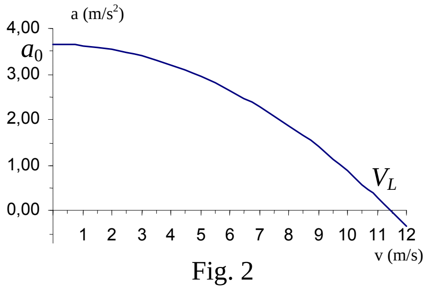

Fig. 2

c₃) La figura 2 indica que la aceleración parte de un valor inicia a_0 y disminuye conforme aumenta la velocidad del bloque hasta que se anula para una determinada velocidad V_L. A partir de entonces, el bloque continuará descendiendo con la velocidad constante V_L que, por esa razón, se denomina *velocidad límite*. Su valor es

$$\boxed{V_L = \sqrt{\frac{a_0}{b}}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_L = 11{,}5\,m/s}$$

c₄) La velocidad límite V_L obtenida es notablemente mayor que la del bloque V_F al final de su recorrido por el plano sin tener en cuenta la fuerza de resistencia del aire. En consecuencia, la longitud L del plano no es suficiente para que el bloque se acerque a la mencionada velocidad límite.

P2.- Ondas estacionarias transversales en una cuerda tensa.

Para poder observar y medir las características de las ondas estacionarias en una cuerda tensa se monta en el laboratorio de un Centro de Enseñanza Secundaria el sistema de la figura 1. Un vibrador, V, excita transversalmente, con una frecuencia *f* y pequeña amplitud, un extremo de una cuerda horizontal. La cuerda se mantiene tensa haciéndola pasar por una polea P y colgando del extremo libre una masa conocida, *M*.

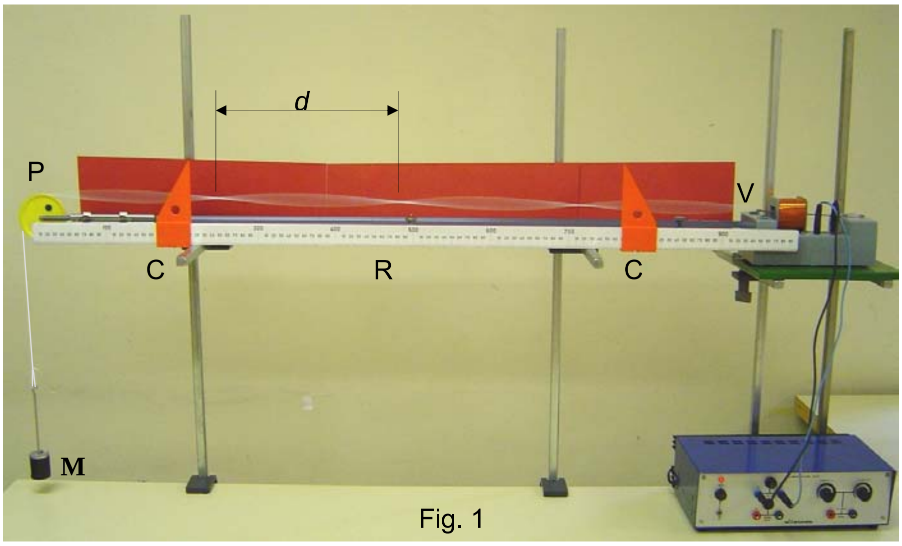

Fig. 1

Al ir modificando *M*, y por tanto la tensión *T* de la cuerda, se encuentran sucesivas situaciones en las que se forma una onda estacionaria, fruto de la interferencia constructiva entre las sucesivas ondas reflejadas en los extremos. La distancia, *d*, entre dos nodos consecutivos de la onda estacionaria puede medirse experimentalmente con una regla, R, provista de dos cursores móviles, C.

La fotografía de la figura 1 se ha obtenido con los siguientes datos: frecuencia $f = 50{,}0\,\mathrm{Hz}$; masa $M = 65{,}0\,g$. Se ha medido una distancia entre nodos consecutivos $d = 237\,\mathrm{mm}$.

a) Determina y calcula la velocidad, *v*, de propagación de las ondas transversales en la cuerda.

b) La velocidad *v* de propagación de ondas transversales en una cuerda tensa depende de la densidad lineal de masa μ de la cuerda (masa por unidad de longitud) y de su tensión *T*. La forma de esta dependencia es una de las cuatro siguientes:

A) $v = \sqrt{\frac{\mu}{T}}$ B) $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ C) $v = \sqrt{\frac{1}{\mu T}}$ D) $v = \sqrt{\mu T}$

b_1) Basándote en el principio de homogeneidad de las fórmulas físicas, indica razonadamente cuál de de estas expresiones es la única correcta.

b_2) Calcula la densidad lineal de masa μ de la cuerda empleada

c) Los vientres (antinodos) de la onda estacionaria de la figura tienen una amplitud de oscilación $A = 12{,}7\,\mathrm{mm}$. Escribe la ecuación de la onda estacionaria.

d) Escribe la ecuación de la velocidad máxima V_t de vibración de cualquier punto de la cuerda y determina su valor para un punto situado a una distancia $L = 3\lambda/4$ de un extremo de la cuerda, siendo λ la longitud de onda.

P2.- Ondas estacionarias transversales en una cuerda tensa

Solución

a) Para que en una cuerda tensa de longitud *L*, con sus dos extremos fijos (nodos en los extremos), se forme una onda estacionaria debe cumplirse

$$L = N\frac{\lambda}{2}$$

donde λ es la longitud de onda de la onda que se propaga por la cuerda y *N* es un número entero que coincide con el número de vientres observados. La distancia *d* entre dos nodos (o vientres) consecutivos, es igual a una semilongitud de onda

$$d = \frac{\lambda}{2} \qquad (1)$$

Por otra parte, la velocidad de propagación de una onda viene dada por

$$v = \lambda\, f \qquad (2)$$

Por tanto, de (1) y (2) se obtiene,

$$\boxed{v = 2\,d\,f} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = 23{,}7\ \mathrm{m/s}}$$

b) b$_1$) De acuerdo con el Análisis Dimensional,

$$[v] = L\,T^{-1} \qquad [\mu] = M\,L^{-1} \qquad T = M\,L\,T^{-2}$$

Por lo que la fórmula correcta es la B, en efecto

$$[v] = \left(\frac{[T]}{[\mu]}\right)^{1/2} = \left(\frac{M\,L\,T^{-2}}{M\,L^{-1}}\right)^{1/2} = L\,T^{-1}$$

b$_2$) Con la expresión correcta B, la densidad lineal de masa de la cuerda resulta

$$\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{M\,g}{v^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\mu = 1{,}13\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/m}}$$

c) La ecuación general de una onda estacionaria en una cuerda es

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,(kx+\varphi)\cos\omega t$$

En donde $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi\,f$ y φ una fase que depende de las condiciones de contorno. En nuestro caso, como para *x* = 0 es *y* = 0 en todo instante, luego $\varphi = 0$ y queda

$$y(x,t) = A\,\mathrm{sen}\,kx\cos\omega t$$

Como $A = 1{,}27\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 4{,}22\,\pi\ \mathrm{m}^{-1}$ y $\omega = 2\pi\,f = 100\,\pi\ \mathrm{s}^{-1}$, la ecuación de la onda es

$$\boxed{y(x,t) = 1{,}27\cdot 10^{-2}\ \mathrm{sen}\ 4{,}22\,\pi x\cos 100\,\pi\,t}$$

d) La velocidad de vibración V_t de cualquier punto de la cuerda viene dada por

$$V_t = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=\mathrm{cte}} = -A\omega\,\mathrm{sen}\,kx\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

El valor máximo de esta velocidad (en valor absoluto) corresponde a $\mathrm{sen}\,\omega t = \pm 1$, es decir

$$(V_t)_{max} = |A\omega\,\mathrm{sen}\,kx|$$

Para el punto $x = 3\lambda/4$,

$$k\,x = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{3\lambda}{4} = \frac{3\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad |\mathrm{sen}\,kx| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{(V_t)_{max} = 3{,}99\ \mathrm{m/s}}$$

P3.- Ionización en un condensador.

La fotografía de la figura 1 corresponde a un montaje experimental existente en un laboratorio de electromagnetismo. El dispositivo, que se esquematiza en la figura 2, consta de un *condensador* plano formado por dos placas conductoras planoparalelas de área $S = 6{,}25 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}^2$, separadas una distancia d = 0,1 m. Una de las placas está conectada al borne positivo de una batería de f.e.m. $\mathcal{E}$ = 60 V y la otra está unida a tierra a través de una resistencia $R = 10^7\ \Omega$. El otro borne de la batería está unido a tierra.

En esta situación, las placas adquieren densidades de carga $+\sigma_0$ y $-\sigma_0$.

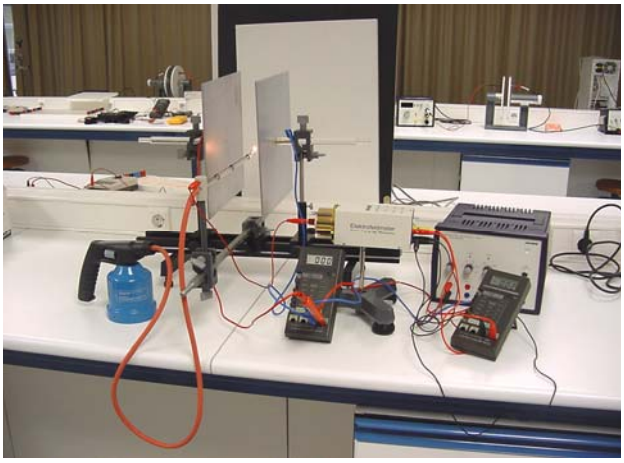

Fig. 1

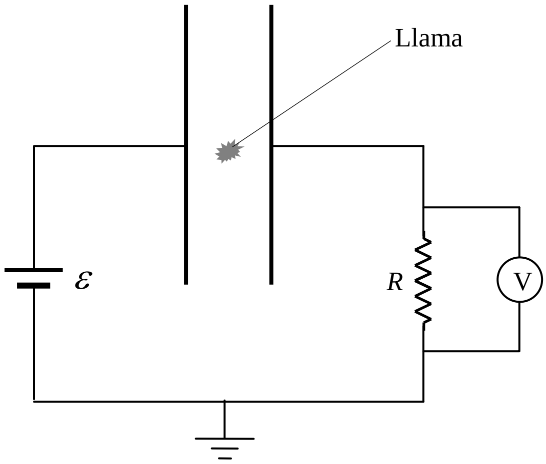

Fig. 2

a) Determina el módulo, dirección y sentido del campo electrostático E en el espacio entre las placas, suponiendo que es prácticamente uniforme.

b) Calcula la densidad de carga σ_0.

c) Se introduce entre las placas un delgado tubo de vidrio que conduce un gas inflamable. Cuando se hace arder, la llama produce la ionización de algunas moléculas que hay entre las placas.

c_1) Suponiendo que cada molécula ionizada da lugar a un ion positivo y a un único electrón. ¿Qué les ocurrirá a estas cargas?

c_2) Manteniendo constante la llama, el voltímetro marca un voltaje de 20 mV. ¿Cómo lo explicas?

c_3) ¿Cuánta carga circula por la resistencia R durante un segundo?

c_4) ¿Cuántas moléculas se ionizan por segundo?

c_5) Se sabe que, en promedio, la energía necesaria para producir una ionización en nuestro sistema es de 34 eV. ¿Qué potencia invierte la combustión en ionizar moléculas?

Datos: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9{,}0 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ $\quad e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$

P3.- Ionización en un condensador.

Solución

a) En las condiciones descritas en el enunciado, el condensador está cargado y la diferencia de potencial aplicada entre sus placas crea un campo electrostático prácticamente uniforme, como se muestra en la figura 3. Su valor es

$$\vec{E} = E \cdot \vec{i} = \frac{\Delta V}{d} \cdot \vec{i} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = 600 \cdot \vec{i} \text{ (V/m)}$$

donde d es la separación entre las armaduras, ΔV su diferencia de potencial, e $\vec{i}$ el vector unitario en la dirección del eje 0X, que hemos considerado horizontal y con origen en la placa positiva.

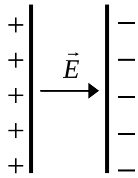

Fig. 3

b) El valor del módulo del campo eléctrico E entre las armaduras viene dado por la expresión

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

siendo σ la densidad de carga en cada placa y ε_0 la constante dieléctrica del aire. Por lo tanto, la densidad de carga en cada placa es

$$\sigma = E\,\varepsilon_0 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma = 5{,}3 \cdot 10^{-9} \text{ C/m}^2$$

c$_1$) Al producirse la ionización de algunas de las moléculas existentes en el interior de las armaduras, aparecen iones positivos y electrones que se moverán impulsados por el campo eléctrico, como se indica en la figura 4.

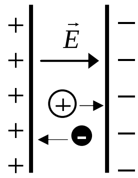

Fig. 4

c$_2$) El ion positivo y el electrón emigrarán a las armaduras negativa y positiva respectivamente produciendo una corriente eléctrica que da lugar a una diferencia de potencial en la resistencia R que se puede medir con el voltímetro V. Si el voltímetro indica un voltaje $V = 20\,\text{mV}$, la intensidad de corriente que circula por la resistencia vendrá dada por[1]

$$I = \frac{V}{R} \qquad \Rightarrow \qquad I = 2{,}0 \cdot 10^{-9} \text{ A}$$

c$_3$) La carga que circula en un intervalo de tiempo τ es

$$Q = \int_0^{\tau} I dt$$

Considerando que la intensidad I permanece constante

$$Q = I\tau$$

Por tanto, en un intervalo τ = 1 s, la carga que circula es

$$\boxed{Q = 2{,}0 \cdot 10^{-9} \text{ C}}$$

c$_4$) Admitiendo que sólo tienen lugar ionizaciones simples, cada molécula produce un ion positivo y un único electrón. La conductividad del gas depende tanto de la densidad de electrones como de iones positivos pero, para neutralizar la ionización de un átomo o molécula en la llama sólo se necesita hacer circular por el exterior del circuito un único electrón. Por tanto, llamando dN al número de moléculas ionizadas en un dt, la carga transportada en ese tiempo es

$$dq = e\,dN \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{dq}{dt} = \frac{dN}{dt} e$$

[1] Supuesto que la resistencia interna del voltímetro es mucho mayor que R. Si no, habría que sustituir R por la resistencia equivalente de ambos elementos en paralelo.

Por tanto

$$\frac{dN}{dt} = \frac{I}{e} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{dN}{dt} = 1{,}2 \cdot 10^{10} \text{ moléculas/s}}$$

c_5) Según el enunciado, la energía de ionización de cada molécula es

$$\Delta E = 34 \text{ eV} = 5{,}4 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

La energía suministrada por la llama para producir *dN* ionizaciones es

$$dW = \Delta E \, dN$$

por lo que la potencia que invierte la radiación para ionizar las moléculas viene dada por

$$P = \frac{dW}{dt} = \Delta E \frac{dN}{dt}$$

de donde se obtiene

$$\boxed{P = 6{,}8 \cdot 10^{-8} \text{ W}}$$