



## PRIMERA PRUEBA

25 de febrero de 2011

### INSTRUCCIONES

**Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas**

**Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema**

**Razona siempre tus planteamientos**

**¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!**



Subvenciona:



## P1. Acelerómetro.

Un acelerómetro es, como su propio nombre indica, un dispositivo para medir aceleraciones. Un modelo sencillo consiste en un cilindro cuyo eje coincide con la dirección de la aceleración que se desea medir. Dentro del cilindro hay una bola sujeta a los extremos mediante dos muelles iguales, y un líquido viscoso que amortigua las oscilaciones de la bola cuando se produce un cambio en la aceleración. En ausencia de aceleración, la bola está en equilibrio en el centro del cilindro, como se representa en la figura 1a. Sin embargo, cuando el dispositivo sufre una aceleración en el sentido del eje OX indicado, la bola alcanza un nuevo estado de equilibrio dinámico, desplazada una distancia  $x < 0$ , como se indica en la figura 1b. Esta distancia no cambia mientras la aceleración sea constante.

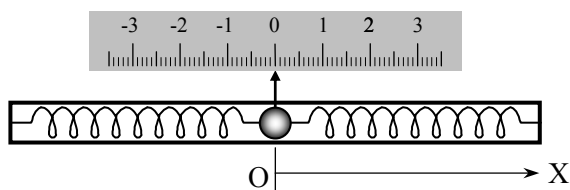


Fig. 1a

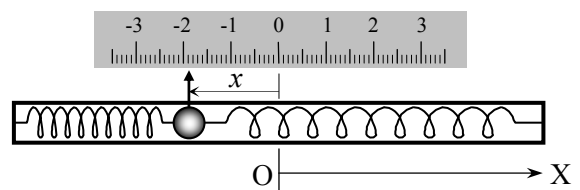


Fig. 1b

- El acelerómetro se sujeta horizontalmente en un vehículo, de forma que el eje del cilindro coincida con la dirección del movimiento (eje OX). En estas condiciones, determina el desplazamiento en equilibrio de la bola,  $x$ , en función de la aceleración del vehículo,  $a$ , la constante elástica de cada muelle,  $k$ , y la masa de la bola,  $M$ .
- Mientras el vehículo acelera uniformemente de 0 a 40 km/h en 3,0 s, el desplazamiento en equilibrio de la bola es  $x = -3,0$  cm. Sabiendo que la masa de la bola es  $M = 10$  g, calcula el valor de la constante  $k$  de cada uno de los muelles.
- La gráfica de la figura 2 muestra un registro de la posición  $x$  de la bola en función del tiempo  $t$  mientras un automóvil se mueve, desde  $t = 0$  hasta  $t = 20$  s. En esta gráfica se observan claramente tres intervalos de tiempo con aceleraciones diferentes. Calcula la aceleración del automóvil en cada uno de estos intervalos.
- Si el automóvil del apartado anterior ha partido del reposo en  $t = 0$ , representa gráficamente, de forma aproximada, su velocidad en función del tiempo entre  $t = 0$  y  $t = 20$  s.
- Calcula por último el espacio total que ha recorrido desde  $t = 0$  hasta  $t = 20$  s.

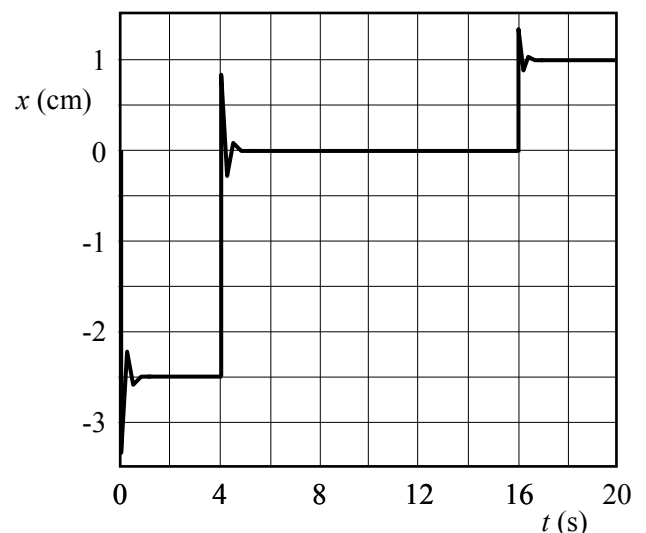


Fig. 2

### Solución P1. Acelerómetro.

- a) Los dos resortes son iguales, es decir tienen la misma constante elástica  $k$  y la misma longitud natural. Cuando están montados en el acelerómetro, unidos a los extremos del cilindro y a la bola, en ausencia de aceleración ambos están deformados (estirados o comprimidos) la misma distancia  $x_0$ , de forma que están ejerciendo fuerzas de igual módulo  $F_0 = kx_0$  sobre la bola, pero en sentidos opuestos, y ésta permanece en el centro del cilindro.

Cuando el sistema se mueve con aceleración uniforme  $a$ , tras amortiguarse la oscilación de la bola se alcanza un nuevo estado de equilibrio dinámico en el que todo el sistema, incluida la bola, se mueve con esta aceleración. Por tanto, sobre la bola debe estar actuando una fuerza neta  $Ma$  en el sentido de la aceleración. Obviamente esta fuerza es la debida al cambio de deformación de los dos muelles, es decir al desplazamiento de la bola respecto al centro del cilindro

$$Ma = -2kx \quad (1)$$

El signo menos indica que, de acuerdo con el enunciado, cuando la aceleración es en sentido positivo ( $a > 0$ ) el desplazamiento es negativo ( $x < 0$ ) y viceversa. Despejando en (1), el desplazamiento en equilibrio de la bola es

$$x = -\frac{Ma}{2k}$$

- b) En una aceleración uniforme, partiendo del reposo, la velocidad final  $v_f$  alcanzada en el instante  $t_f$  es

$$v_f = at_f$$

Con los datos de este apartado, y teniendo en cuenta que  $40 \text{ km/h} = 40 \cdot 10^3 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 11,11 \text{ m/s}$ ,

$$a = \frac{v_f}{t_f} = 3,704 \text{ m/s}^2$$

Despejando  $k$  de (1)

$$k = -\frac{Ma}{2x} = 0,6173 \text{ N/m} \quad \boxed{k = 0,62 \text{ N/m}}$$

- c) En la gráfica de la figura 2 del enunciado se observan tres intervalos de tiempo en los que, salvo la breve oscilación amortiguada inicial,  $x$  es constante, es decir la aceleración  $a$  es constante:

$$0 < t < 4 \text{ s} : \quad x_1 = -2,5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad a_1 = -2kx_1 / M = 3,0864 \text{ m/s}^2, \quad \boxed{a_1 = 3,1 \text{ m/s}^2}$$

$$4 \text{ s} < t < 16 \text{ s} : \quad x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_2 = 0}$$

$$16 \text{ s} < t < 20 \text{ s} : \quad x_3 = 1,0 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad a_3 = -2kx_3 / M = -1,2346 \text{ m/s}^2, \quad \boxed{a_3 = -1,2 \text{ m/s}^2}$$

En resumen, el coche se mueve con aceleración  $a_1$  durante los cuatro primeros segundos. Entre  $t = 4 \text{ s}$  y  $t = 16 \text{ s}$  se mueve con aceleración nula, es decir con velocidad constante, y desde  $t = 16 \text{ s}$  hasta  $t = 20 \text{ s}$  con aceleración  $a_3$  negativa, lo que indica que el coche frena.

- d) Como parte del reposo, la velocidad del coche aumenta linealmente con el tiempo durante el primer intervalo.

$$t_{i1} = 0 < t < t_{f1} = 4 \text{ s} : \quad v_1 = a_1 t$$

Durante el segundo intervalo la velocidad es constante, igual a la alcanzada al final del primer intervalo, es decir en  $t_{f1} = 4$  s

$$t_{i2} = 4 \text{ s} < t < t_{f2} = 16 \text{ s} : \quad v_2 = \text{cte.} = a_1 t_{f1} = 12,346 \text{ m/s} = 44,444 \text{ km/h}$$

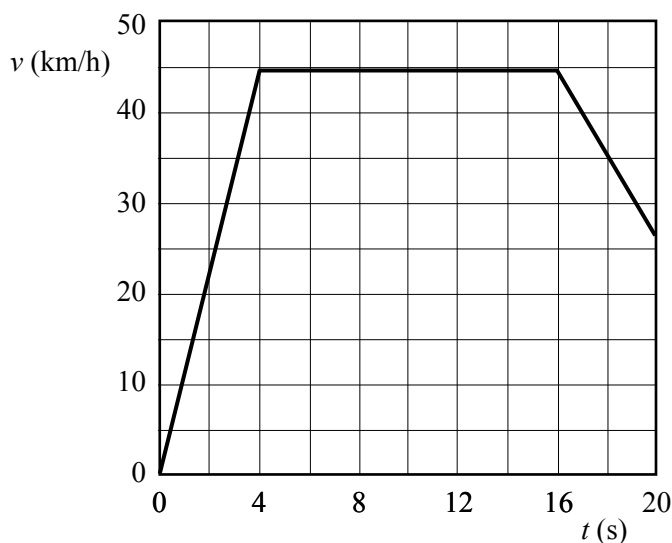
En el tercer intervalo de tiempo el coche decelera uniformemente ( $a_3 < 0$ ), con lo que su velocidad disminuye linealmente partiendo de la velocidad inicial anterior,  $v_2$ , en la forma

$$t_{i3} = 16 \text{ s} < t < t_{f3} = 20 \text{ s} : \quad v_3 = v_2 + a_3(t - t_{i3})$$

La velocidad final en  $t_{f3} = 20$  s es

$$v_{f3} = 12,346 \text{ m/s} - 1,2346 \text{ m/s}^2 \times (20 - 16) \text{ s} = 7,4074 \text{ m/s} = 26,667 \text{ km/h}$$

En resumen, la representación gráfica de la velocidad en función del tiempo sería la siguiente



e) El espacio recorrido en cada uno de los tres intervalos de tiempo es

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_{f1}^2 = 24,69 \text{ m}$$

$$s_2 = v_2 (t_{f2} - t_{i2}) = 148,15 \text{ m}$$

$$s_3 = v_2 (t_{f3} - t_{i3}) + \frac{1}{2} a_3 (t_{f3} - t_{i3})^2 = 39,51 \text{ m}$$

Y el espacio total recorrido es

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 212,35 \text{ m} \quad \boxed{s = 2,1 \cdot 10^2 \text{ m}}$$

Nota sobre precisión de resultados: los datos numéricos de este problema están dados con dos cifras significativas, por lo que no tiene sentido dar los resultados con más de dos cifras. Sin embargo, para evitar arrastrar y amplificar errores de redondeo en las operaciones de los sucesivos apartados, se ha optado por trabajar con cuatro o cinco cifras y redondear únicamente al presentar los resultados que se piden en los diversos apartados del enunciado.

## P2. Tiro con arco.

Ante las "necesidades" de la caza y de la guerra, la humanidad ha desarrollado a lo largo de su historia el tiro con arco. En la actualidad, salvo algunos pueblos primitivos que siguen utilizándolo para cazar, solo se usa como una modalidad deportiva.

Los constructores de arcos antiguos no necesitaron conocer las leyes de la física, pero hoy en día la tecnología basada en detallados estudios físicos permite mejorar sus prestaciones con diseños que en nada recuerdan a los antiguos arcos medievales. En este problema te proponemos que realices unos cálculos basados en dos modelos físicos de arco.

En una primera aproximación, podemos considerar que un arco medieval tiene un comportamiento análogo a algo que encanta a los físicos: un muelle de constante  $K$ . Con este *modelo lineal* de arco (ley de Hooke) se supone que la fuerza  $F$  de tensado del arco es proporcional a la longitud  $x$  que se deforma (figura 1).

- Cuando el arquero ejerce una fuerza  $F_1$ , la distancia de tensado es  $x_1$ . Determina, en función de  $F_1$  y  $x_1$ , el trabajo  $W_1$  que ha realizado el arquero para tensar el arco. Calcula su valor para  $F_1 = 700 \text{ N}$  y  $x_1 = 0,58 \text{ m}$ .
- Cuando el arquero efectúa el disparo, la mayor parte de la energía potencial almacenada en el arco se transfiere a la flecha, y el resto se invierte en energía cinética de las partes móviles del propio arco. Si la masa de la flecha es  $m_1 = 0,060 \text{ kg}$  y admitimos que recibe el 80% de la energía almacenada en el arco, calcula la velocidad de la flecha cuando abandona el arco.

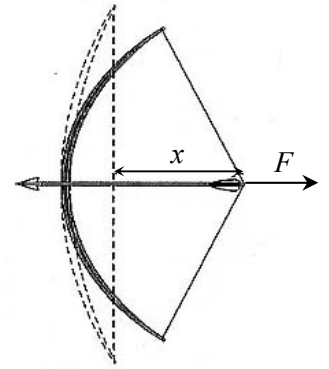


Fig. 1

Los modernos arcos compuestos, como el de la figura 2, están dotados de unas complicadas poleas excéntricas y no tienen un comportamiento lineal; el modelo del muelle no sirve para ellos. La fuerza  $F$  para tensarlo y el desplazamiento  $x$  siguen una relación no lineal, como la representada en la gráfica de la figura 3. La fuerza que hay que aplicar para mantenerlo tensado con su deformación máxima es mucho menor que con un arco tradicional, lo que evita temblores musculares del arquero y mejora notablemente la puntería.

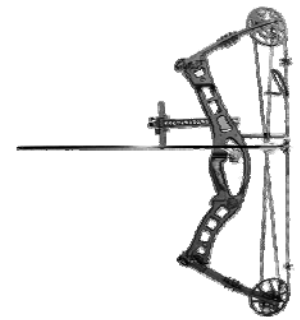


Fig. 2

- Admitiendo que en los arcos compuestos prácticamente toda la energía potencial almacenada se transmite a la flecha, haz una estimación razonada de la masa  $m_2$  que debe tener la flecha para que cuando se tense el arco una distancia máxima  $x_2 = 0,50 \text{ m}$ , su velocidad de salida sea igual a la calculada en el apartado b) para el arco medieval.

Ayuda: recuerda que, para una distancia máxima de tensado  $x_m$ , el área comprendida entre la curva  $F(x)$  y el eje de abscisas hasta  $x_m$  es proporcional al trabajo realizado por  $F$  hasta alcanzar esa deformación.

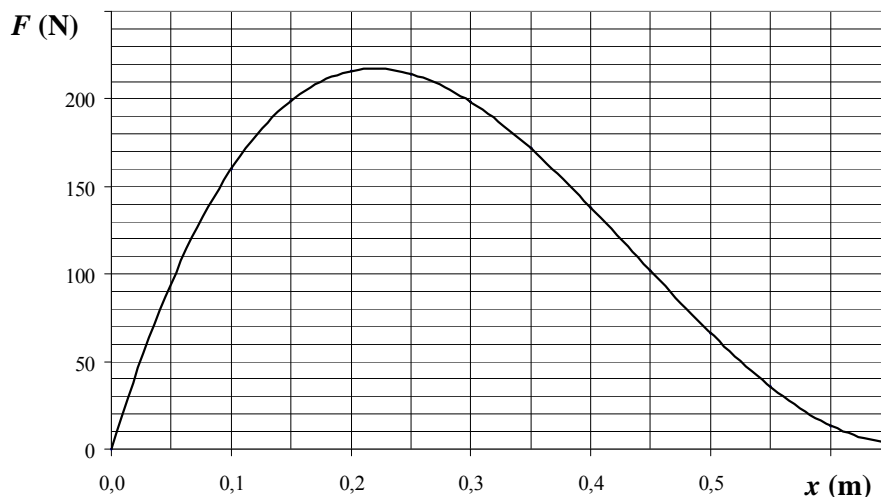


Fig. 3

### Solución P2. Tiro con arco.

- c) Tal como se indica en el enunciado, el comportamiento del arco “medieval” es equivalente al de un muelle ideal de constante  $K$ , por lo que la fuerza  $F$  que ejerce el arquero es proporcional a la longitud que se deforma el muelle (el arco, en este caso). Por tanto, la representación gráfica de  $F$  en función de  $x$  es la que se muestra en la figura 4.

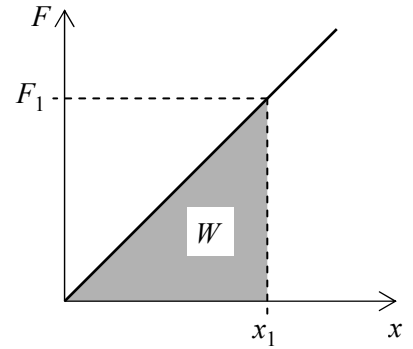


Fig. 4

El trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento puede calcularse como el área comprendida entre la curva  $F(x)$  y el eje de abscisas, entre los valores inicial y final de  $x$ . En nuestro caso, es el área del triángulo sombreado en la figura 4

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2} F_1 x_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_1 = 203 \text{ J}}$$

La pregunta de este apartado puede abordarse de otra forma, físicamente equivalente a la anterior: como suponemos que el arco responde a un modelo elástico, para cualquier deformación se cumple  $F = Kx$ . Además, como la fuerza elástica es conservativa, el trabajo realizado por el arquero es igual a la energía potencial  $U_1$  almacenada por el arco

$$W_1 = U_1 = \frac{1}{2} Kx_1^2 = \frac{1}{2} F_1 x_1$$

- d) Cuando se dispara la flecha, el 80% de la energía potencial se transforma en energía cinética de la flecha. Si llamamos  $\gamma = 0,8$  a la eficiencia de esta transformación, es inmediato deducir la velocidad de la flecha

$$\gamma U_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2\gamma U_1}{m_1}} = 73,6 \text{ m/s}}$$

- e) La energía potencial almacenada por el arco compuesto de nuevo coincide con el trabajo realizado por el arquero al tensarlo,  $W_2 = U_2$ . Como no se conoce la expresión analítica de  $F(x)$ , este trabajo sólo puede calcularse, de forma aproximada, a partir del área bajo la curva de la figura 5, entre el origen y la deformación máxima  $x_2 = 0,50$  m. En concreto, la energía potencial del arco será igual al número de rectángulos bajo la curva, multiplicado por la energía que corresponde a uno de ellos. Cada rectángulo tiene como base 0,05 m y altura 10 N, por lo que su área representa un trabajo de 0,50 J. Contando cuadros enteros y compensando fracciones de cuadro en cada columna de la figura 5, se obtiene que el área bajo la curva es aproximadamente la de 153 rectángulos. Por tanto

$$U_2 \approx 153 \times 0,50 \text{ J} = 76,5 \text{ J}$$

Como se admite que esta energía se transfiere íntegramente a la flecha, y además se quiere que su velocidad  $v_2$  de salida sea la misma que la  $v_1$  del apartado b), podemos escribir

$$U_2 = \frac{1}{2} m_2 v_1^2$$

lo que permite calcular la masa  $m_2$  de la flecha

$$\boxed{m_2 = \frac{2U_2}{v_1^2} \approx 28 \text{ g}}$$

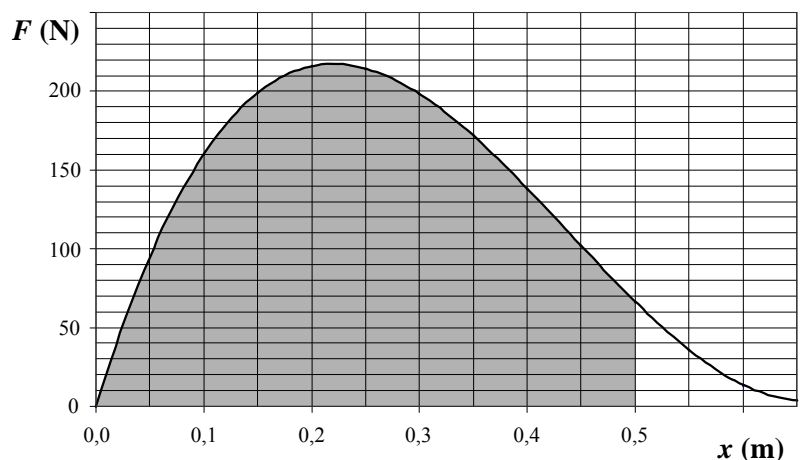


Fig. 5

### P3. Espectrómetro de Bainbridge.

Para estudiar la estructura y la composición de la materia se utilizan técnicas experimentales conocidas como *espectroscopía de masas*, consistentes en medir la masa y la abundancia relativa de los iones de una muestra. En la figura 1 se muestra el esquema de un *espectrómetro de Bainbridge* utilizado para estudiar iones que tienen la misma velocidad.

Los iones que provienen de una cámara de ionización, atraviesan las rendijas colimadoras S para delimitar su dirección de propagación. A partir de ahí penetran en una región del espacio (*selector de velocidades*) donde coexisten un campo electrostático uniforme  $E_1$ , producido por dos placas planoparalelas sometidas a una diferencia de potencial  $V$ , y un campo magnetostático uniforme  $B_1$  perpendicular al campo eléctrico.

Los iones que atraviesan esta región sin desviarse penetran en otra región en la que existe un segundo campo magnético uniforme  $B_2$ , paralelo a  $B_1$  y, como consecuencia de ello, describen órbitas semicirculares e impactan sobre una placa fotográfica F.

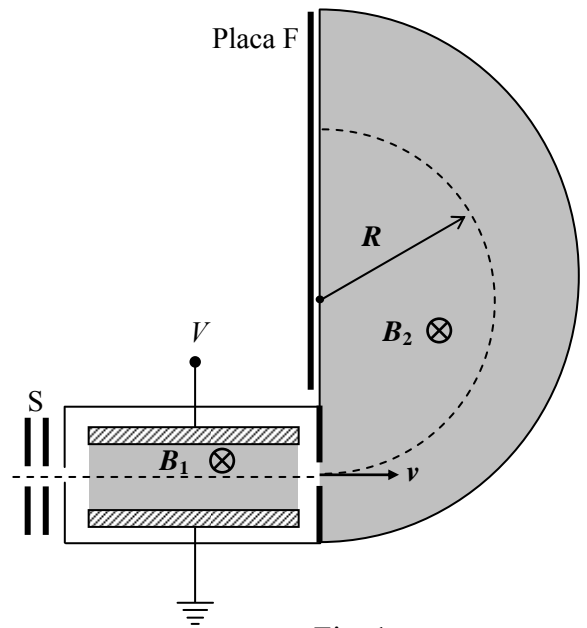


Fig. 1

Considera un espectrómetro que opera con  $E_1 = 15 \text{ kV/m}$ ,  $B_1 = B_2 = 0,50 \text{ T}$ .

- Sabiendo que la separación entre las placas es  $d = 4 \text{ mm}$ , determina la diferencia de potencial  $V$  entre ellas.
- Determina la velocidad  $v$  de los iones que pueden penetrar en la segunda región del espectrómetro.
- Demuestra que la relación  $q/m$  (carga/masa) de los iones que impactan en la placa F viene dada por

$$\frac{q}{m} = \frac{E_1}{R B_1 B_2}$$

donde  $R$  es el radio de la trayectoria circular seguida por el ión.

- Si la fuente iónica inyecta los tres isótopos del magnesio  $^{24}\text{Mg}^+$ ,  $^{25}\text{Mg}^+$  y  $^{26}\text{Mg}^+$ , que tienen carga  $+e$ , calcula la separación entre las líneas que aparecen impresionadas en la placa F por el impacto de los tres tipos de iones. Considera que las masas atómicas de los isótopos son, en unidades de masa atómica, iguales a su número másico.

Datos: unidad de masa atómica  $u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ; carga elemental  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

### Solución P3. Espectrómetro de Bainbridge.

- a) Conocida la relación entre el campo y el potencial electrostático en la región comprendida entre las dos placas planoparalelas, podemos calcular la diferencia de potencial  $V$  (Nótese que el plano inferior está a potencial nulo).

$$E = \frac{V}{d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = E d = 60 \text{ V}}$$

- b) En la región 1 del espectrómetro coexisten un campo electrostático uniforme  $E_1$ , y un campo magnetostático uniforme  $B_1$ , por tanto las cargas que la atraviesen estarán sometidas a la fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Para penetrar en la región 2 deben atravesar la región 1 sin desviarse. Consecuentemente la fuerza debida al campo electrostático y la debida al campo magnetostático deben ser iguales y de sentido contrario para que la fuerza total sea nula. De la figura 1 observamos que  $\vec{v} \times \vec{B}_1$  está contenido en el plano del papel y va de abajo hacia arriba; por tanto, el campo  $\vec{E}_1$  deberá ir de arriba hacia abajo y su módulo deberá coincidir con el producto  $vB_1$

$$E_1 = v B_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{E_1}{B_1} = 3,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}}$$

- c) En la región 2 los iones se mueven en el seno de un campo magnético  $B_2$ , por tanto se ven sometidos a una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento que les proporcionará una aceleración centrípeta y les provocará un movimiento circular de radio  $R$ .

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \Rightarrow \quad F = q v B_2 = m \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{m} = \frac{v}{R B_2}$$

Como en esta región solo entran los iones con velocidad  $v = E_1 / B_1$  (apartado b), podemos concluir que

$$\boxed{\frac{q}{m} = \frac{E_1}{R B_1 B_2}}$$

- d) Despejando el radio  $R$  en la expresión anterior

$$R = \frac{m E_1}{q B_1 B_2}$$

que puede evaluarse para los tres isótopos del magnesio,  $^{24}\text{Mg}^+$ ,  $^{25}\text{Mg}^+$  y  $^{26}\text{Mg}^+$ .

Dado que las trayectorias circulares no son concéntricas sino tangentes en la rendija de entrada en la región 2), la separación entre las líneas de dos isótopos es el doble de la diferencia de los radios de sus trayectorias. Además, como  $m(^{24}\text{Mg}^+) = 24 \text{ u}$ ;  $m(^{25}\text{Mg}^+) = 25 \text{ u}$  y  $m(^{26}\text{Mg}^+) = 26 \text{ u}$ , obtenemos que la separación  $\Delta$  entre la línea del isótopo  $^{24}\text{Mg}^+$  y la del  $^{25}\text{Mg}^+$  es

$$\boxed{\Delta = \frac{2u E_1}{q B_1 B_2} = 1,2 \text{ mm}}$$

La misma distancia  $\Delta$  existe entre la línea  $^{26}\text{Mg}^+$  y la del  $^{25}\text{Mg}^+$ . Consecuentemente la distancia  $\Delta'$  entre la línea  $^{26}\text{Mg}^+$  y la del  $^{24}\text{Mg}^+$  será

$$\boxed{\Delta' = 2 \Delta = 2,4 \text{ mm}}$$