XXIII Olimpiada
ESPAÑOLA DE FÍSICA
PRUEBAS DE ARAGÓN

PRIMERA PRUEBA

24 de febrero de 2012

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas

Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

Subvenciona:

P1.- Cambio de órbita de un satélite artificial.

Un satélite artificial, de masa M, describe una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra.

a) Deduce la expresión del módulo de la velocidad del satélite, V_1, y calcula su valor, así como el de su periodo de revolución, T.

Cuando el satélite se encuentra en la posición indicada en la figura 1.a, mediante un motor cohete que se acciona durante un breve intervalo de tiempo, se incrementa el módulo de su velocidad un 0,250 %, manteniendo su dirección y sentido, es decir $V_2 = \alpha V_1$ con $\alpha = 1{,}0025$. Como consecuencia, el satélite cambia de la órbita circular inicial a la órbita elíptica de la figura 1.b, cuyo apogeo es el punto A.

b) Deduce las expresiones del módulo de la velocidad, V_A, y de su altura sobre la superficie de la Tierra, h_A, en el apogeo A, y calcula sus valores.

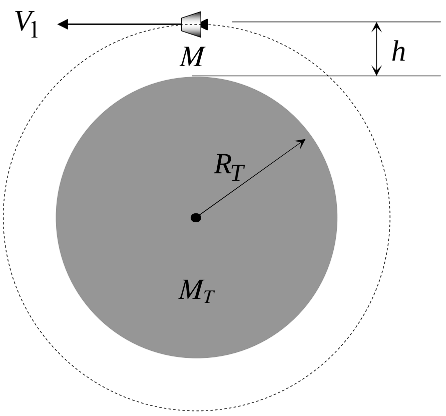

Fig. 1.a

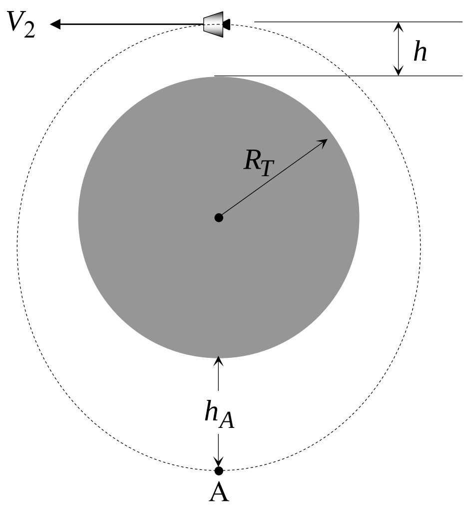

Fig. 1.b

Tal como se ha dicho anteriormente, para pasar a la órbita elíptica se acciona el motor cohete que quema rápidamente una masa de combustible $\Delta m = M / 50$. Los gases de la combustión se expulsan en dirección paralela a la velocidad del satélite y en sentido opuesto, con una velocidad de módulo v_J, relativa al satélite en su órbita circular inicial. El proceso está representado en la figura 2.

c) Determina v_J para que la velocidad del satélite en el inicio de la órbita elíptica sea la V_2 indicada, y calcula su valor.

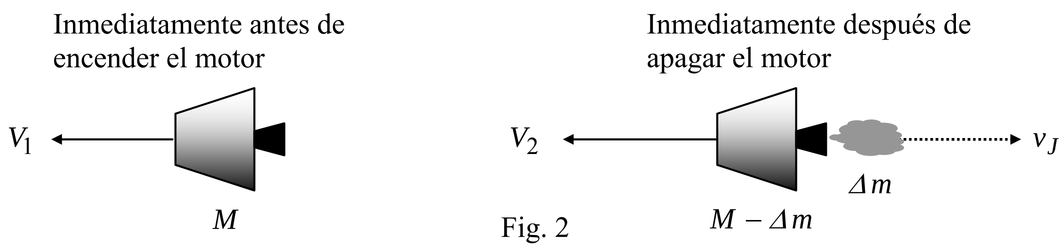

Fig. 2

Datos:

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m

Aceleración de la gravedad: $g = 9{,}81$ m/s^2

Masa del satélite con su combustible: $M = 1{,}25 \times 10^3$ kg

Altura del satélite en el inicio del cambio de órbita: $h = 2{,}80 \times 10^5$ m

Solución P1.- Cambio de órbita de un satélite artificial.

a) Un satélite de masa *M*, en una órbita circular en torno a la Tierra de radio $R_P = R_T + h$, verifica que

$$G\frac{M_T M}{R_P^2} = M\frac{V_1^2}{R_P} \qquad \Rightarrow \qquad V_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_P}}$$

Teniendo en cuenta que $g = \dfrac{GM_T}{R_T^2}$ y que $R_P = R_T + h$, resulta

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{R_T + h}}} \quad (1) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_1 = 7{,}74\times10^3 \text{ m/s}}$$

Por otra parte, como $\qquad V_1 = \omega R_P = \dfrac{2\pi}{T}R_P \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = 5{,}40\times10^3 \text{ s}}$

b) Una vez que el satélite está en su nueva órbita (figura 3), se conserva su momento angular respecto al centro de la Tierra y su energía mecánica. Si llamamos M' a su nueva masa (puesto que ha perdido la del combustible quemado), y R_P y R_A a las distancias del perigeo y apogeo, respectivamente, al centro de la Tierra, se verificará que

$$\begin{cases} M'V_2R_P = M'V_AR_A \\ \dfrac{1}{2}M'V_2^2 - G\dfrac{M_T M'}{R_P} = \dfrac{1}{2}M'V_A^2 - G\dfrac{M_T M'}{R_A} \end{cases}$$

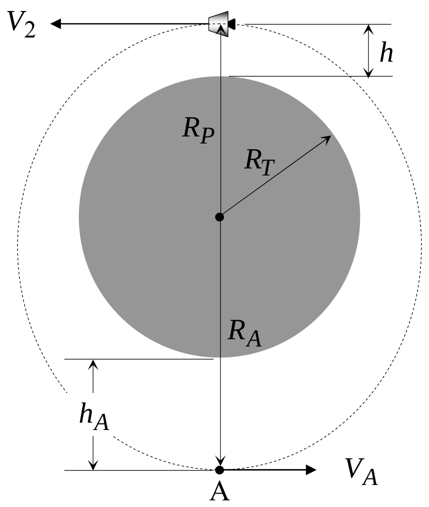

Fig. 3

Una vez simplificadas estas igualdades, y expresando G en función de g y R_T, quedan

$$\begin{cases} V_2R_P = V_AR_A & (2) \\ V_2^2 - V_A^2 = 2gR_T^2\left(\dfrac{1}{R_P} - \dfrac{1}{R_A}\right) & (3) \end{cases}$$

Escribiendo $V_2^2 - V_A^2 = (V_2 - V_A)(V_2 + V_A)$, despejando R_A de (2), sustituyendo en (3) y simplificando, resulta

$$V_A = \frac{2gR_T^2}{(R_T + h)V_2} - V_2$$

Teniendo en cuenta (1),

$$V_A = \frac{2V_1^2}{V_2} - V_2 \qquad (4)$$

Como $V_2 = \alpha V_1$, con $\alpha = 1{,}0025$, operando en (4) la velocidad del satélite cuando pasa por el apogeo resulta

$$\boxed{V_A = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha}V_1} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_A = 7{,}68\times10^3 \text{ m/s}}$$

En cuanto a la distancia en el apogeo, R_A, de (2) se tiene

$$R_A = \frac{V_2}{V_A}(R_T + h) \qquad \Rightarrow \qquad R_A = 6{,}72\times10^6 \text{ m}$$

Y, en definitiva, la altura del apogeo sobre la superficie de la Tierra será:

$$h_A = R_A - R_T \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{h_A = 3{,}47 \times 10^5 \ \text{m}}$$

c) Consideremos como sistema mecánico al propio satélite junto con su combustible. El sistema se mueve con una velocidad V_1 respecto a un sistema de referencia fijo en el centro de la Tierra. Los gases producidos al quemar parte del combustible durante un tiempo muy breve, tienen una masa Δm y salen expulsados con una velocidad v_j respecto al satélite en su órbita inicial. Como sobre este sistema mecánico no actúan fuerzas exteriores, se conservará su momento lineal. Es decir

$$M\,V_1 = (M - \Delta m)V_2 + \Delta m(V_1 - v_j) \tag{5}$$

En donde V_2 es la nueva velocidad del satélite, calculada en el apartado anterior, y $V_1 - v_j$ es el módulo de la de los gases expulsados, referida al sistema fijo en la Tierra.

De (5) se obtiene

$$\boxed{v_j = \left(\frac{M}{\Delta m} - 1\right)(V_2 - V_1)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_j = 9{,}48 \times 10^2 \ \text{m/s}}$$

P2.- (I) La ósmosis y la presión osmótica[1].

El fenómeno físico de la *ósmosis* se explica fácilmente mediante un ejemplo. Consideremos dos recipientes abiertos a la atmósfera y conectados en su base a través de una *membrana semipermeable*, como se muestra en la figura 1.a. El recipiente 1 contiene una disolución de una sustancia B (soluto) en un líquido A (disolvente), con una concentración C_1. El recipiente 2 contiene la misma disolución, pero con una concentración mayor: $C_2 > C_1$. Los poros de la membrana semipermeable tienen mayor tamaño que las moléculas del disolvente A, pero menor que las del soluto B, por lo que sólo el disolvente puede fluir en ambos sentidos a través de la membrana. El fenómeno de la ósmosis consiste en el paso de disolvente de la región de menor concentración a la de mayor, tendiendo a igualar las concentraciones. Como consecuencia, el nivel de la disolución en el compartimento 2 asciende paulatinamente (figura 1.b) hasta llegar a un estado de equilibrio en el que la diferencia de niveles entre ambos compartimentos alcanza una altura determinada, *h* (figura 1.c).

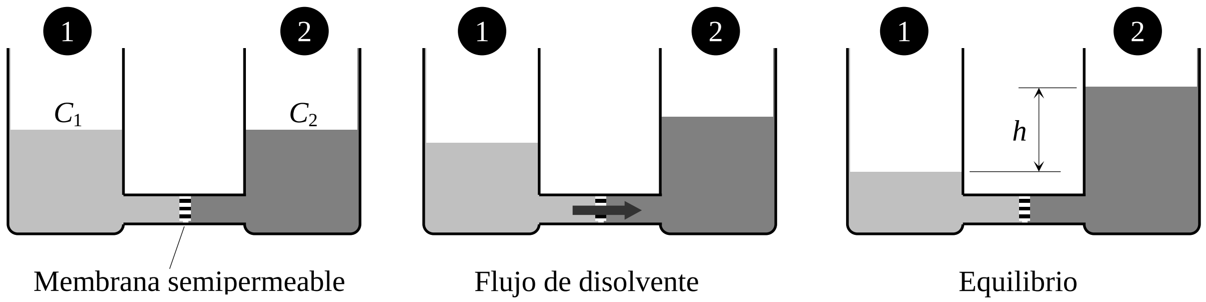

Fig. 1.a   Fig. 1.b   Fig. 1.c

A primera vista resulta sorprendente que el líquido fluya de la región 1 a la 2, hasta alcanzar un equilibrio donde la altura, y por tanto la presión hidrostática en el fondo, es mayor en el recipiente 2. Esta paradoja se explica mediante el concepto de *presión osmótica*. Dicha presión, a la que asignaremos el símbolo Π, puede definirse como *la diferencia de presión hidrostática que debe haber entre los dos lados de una membrana semipermeable para detener el flujo de disolvente a través ella*. En otras palabras, la presión osmótica coincide con la diferencia de presión hidrostática cuando se alcanza el estado de equilibrio.

El botánico alemán Pfeffer, fue el primero en realizar medidas de la presión osmótica y estableció que era proporcional a la diferencia de concentraciones del soluto a cada lado de la membrana y a la temperatura absoluta *T*. Posteriormente, el químico holandés Van´t Hoff, primer premio Nobel de Química en 1901, demostró que para bajas concentraciones (disoluciones diluidas), la relación es análoga a la ecuación de los gases perfectos.

$$\Pi = \left(C_2 - C_1\right) R T \,,$$

donde $R = 8{,}3145\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$ y T es la temperatura absoluta.

La ósmosis desempeña un papel primordial en los seres vivos, concretamente en el transporte de sustancias a través de las membranas celulares. Un ejemplo de ello es el ascenso de la savia por los vasos de las plantas, que permite nutrir sus células. El ascenso se produce gracias a la presión osmótica entre la disolución (savia) en el interior del árbol y el agua de la tierra que rodea a las raíces.

Datos: La savia de un arce contiene el 1% en masa de sacarosa en agua, la masa molecular de la sacarosa es 342 g/mol, la densidad de la disolución es $\rho = 1{,}0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ y la temperatura es $T = 300\ \mathrm{K}$. Calcula:

I.a) La concentración de la disolución de sacarosa en agua, expresada en mol/m^3.

I.b) La presión osmótica.

I.c) La altura que puede alcanzar la savia en los arces.

---

[1] La ósmosis es un fenómeno físico, por eso se propone como ejercicio en una Olimpiada de Física, a pesar de su "apariencia" química, En cualquier caso, merece la pena recordar que la Física y la Química son partes sustanciales de la Ciencia, en cuyo estudio deben ir siempre de la mano.

(II) Ósmosis inversa.

Por la propia definición anterior de presión osmótica, es fácil comprender que si en el recinto con mayor concentración de soluto se aumenta la presión, el disolvente pasará a través de la membrana semipermeable hacia la región de concentración menor. Este fenómeno que se conoce con el nombre de *ósmosis inversa*, tiene aplicaciones de elevado interés tecnológico como, por ejemplo, producción de agua ultrapura, ablandamiento de aguas duras y otra, de gran importancia y actualidad, como es la desalinización de agua marina.

Supongamos que en los recipientes 1 y 2 de la figura 2.a, existe agua pura y agua salada, respectivamente. En el recipiente 2, mediante una fuerza aplicada sobre un émbolo, ejercemos una presión ligeramente superior a la presión osmótica. El disolvente, agua en este caso, pasa a través de la membrana semipermeable del recipiente 2 al 1. La disminución de agua en 2 hace que, en un estado como el representado en la figura 2.b, la concentración de sal haya aumentado, mientras que en el 1 aumenta la cantidad de agua pura. Este proceso realizado de forma continua constituye el fundamento de las aplicaciones citadas.

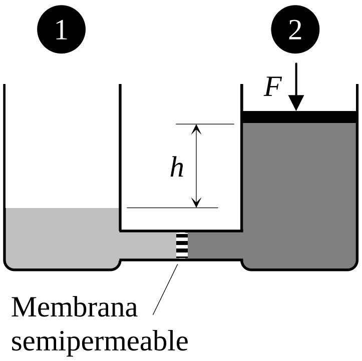

Fig. 2.a

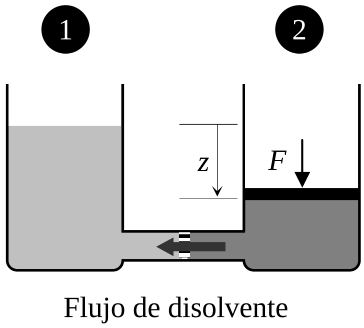

Fig. 2.b

Supongamos que a una temperatura de 300 K se desea desalinizar $1\,\mathrm{m}^3$ de agua de mar, con una concentración de $5{,}8\ \mathrm{g}$ de sal (NaCl) por litro de agua. La masa molecular de la sal es $58\ \mathrm{g/mol}$.

II.a) Admitiendo que la sal disuelta está completamente disociada en sus iones Na^+ y Cl^- y que ni uno ni otro pueden atravesar la membrana, calcula la presión osmótica de la disolución. Ten en cuenta que la presión osmótica es una propiedad coligativa, es decir, es proporcional al número total de partículas disueltas.

II.b) Supongamos que la presión que se ejerce mediante el émbolo es prácticamente igual a la presión osmótica. Calcula el trabajo que hay que realizar para desalinizar 1 m^3 de agua de mar?

II.c) El precio del kW·h eléctrico es de 0,142 €. ¿Cuánto cuesta desalinizar 1 m^3 de agua de mar?

Solución P2.- La ósmosis, la presión osmótica y la ósmosis inversa.

I.a) Si la sacarosa es el 1% de la disolución, en 1 m^3 su masa será 10 kg. Como su masa molecular es 342 g (masa de un mol), el número de moles de sacarosa por unidad de volumen es

$$C = \frac{10^4 \text{ g/m}^3}{342 \text{ g/mol}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{C = 29{,}2 \text{ mol/m}^3}$$

I.b) La presión osmótica viene dada por $\Pi = C\,R\,T$. En nuestro caso

$$\boxed{\Pi = 7{,}28 \times 10^4 \text{ Pa}}$$

I.c) De acuerdo con el enunciado, la savia ascenderá hasta una altura *h* tal que la presión hidrostática que ejerza sea igual a la osmótica. Si ρ es la densidad de la disolución, se verificará que

$$\rho\, g\, h = \Pi \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{\Pi}{\rho\, g} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{h = 7{,}43 \,\text{m}}$$

II.a) En 1 m^3 de agua de mar hay 5,8 kg de sal, o lo que es lo mismo, $5{,}8 \times 10^3$ g . Por consiguiente, como la masa de un mol de NaCl es 58 g, el número de moles por unidad de volumen es

$$C' = 1{,}0 \times 10^2 \text{ mol/m}^3$$

Pero, tal como indica el enunciado, la sal se disocia en los iones Na^+ y Cl^-, ambos son incapaces de atravesar la membrana semipermeable y, por lo tanto, en la presión osmótica intervienen ambos iones. En este caso, en la expresión de Van´t Hoof, deberá figurar el doble de la concentración C', es decir

$$\Pi = 2\, C'\, R\, T \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Pi = 4{,}99 \times 10^5 \text{ Pa}}$$

II.b) El trabajo de la fuerza *F* que actúa sobre el émbolo para hacerlo descender una distancia *z* es

$$W = F\; z$$

Si llamamos *S* al área del émbolo, *F/S* es la presión que ejerce sobre la disolución y, tal como se indica en el enunciado, esta presión debe ser igual (ligeramente superior) a la presión osmótica Π .

$$W = \frac{F}{S}\, S\, z = \Pi\; \Delta V$$

Donde ΔV es el volumen de disolvente (agua) que ha pasado a través de la membrana. Este trabajo es la energía que es preciso invertir en la desalinización de dicho volumen de agua de mar. Si $\Delta V = 1 \text{ m}^3$ el valor de esta energía será

$$\boxed{W = 4{,}99 \times 10^5 \text{ J}}$$

II.c) Como $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3{,}60 \times 10^6 \text{ J}$, la energía anterior será

$$W = 0{,}139 \;\; \text{kW} \cdot \text{h}$$

Si el precio del kW·h eléctrico es 0,142 €, el precio del m^3 de agua de mar desalinizada es, como mínimo:

$$\boxed{\text{Precio desalinización} = 0{,}02 \text{ €} / \text{m}^3}$$

P3.- Refracción de olas.

Un tipo particular de ondas son las olas del mar. Cuando las aguas en las que se propagan son poco profundas, entendiendo por ello aguas cuya profundidad es mucho menor que la longitud de onda de las olas, la velocidad de propagación depende de la profundidad h. En la figura 1 se representa esta dependencia.

Supón que el fondo marino es irregular, como el representado en la figura 2, en el que hay tres regiones de profundidades $h_1 = 2{,}0\ \text{m},\ h_2 = 1{,}0\ \text{m},\ y\ \ h_3 = 3{,}0\ \text{m}$, con fronteras rectas y paralelas.

Considera que las olas son ondas planas y que su dirección de propagación (rayo) en la región 1 alcanza la región 2 con un ángulo de incidencia $\theta_1 = 25º$. Véase la figura 3, que representa una *vista aérea* del mar.

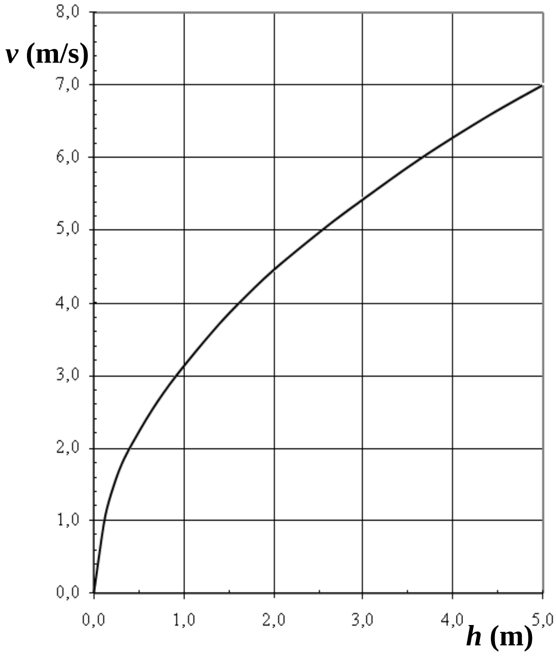

Fig. 1

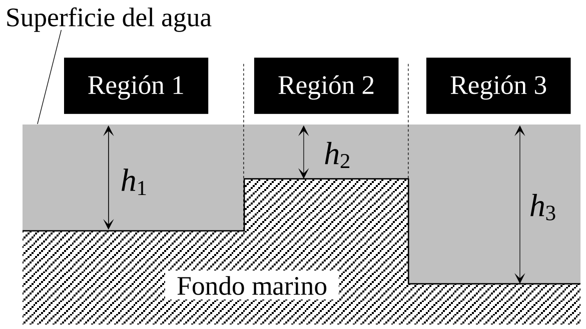

Fig. 2

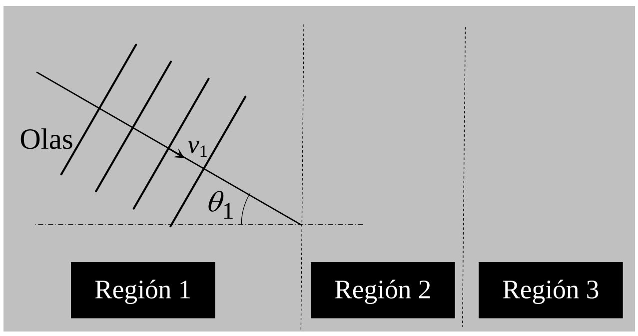

Fig. 3

a) Determina las direcciones de propagación de las olas en las regiones 2 y 3, es decir los ángulos respecto a la normal θ_2 y θ_3 .

b) ¿Cuál es el valor mínimo del ángulo de incidencia en la región 1, θ_L , para el cual no existen olas en la región 3?

En los litorales en los que la profundidad del fondo marino disminuye progresivamente con una pendiente suave, como ocurre en la playa mostrada en la fotografía de figura 4, se observa que la dirección final de propagación de las olas es perpendicular a la línea de litoral. Esto equivalente a decir que las olas, al acercarse al litoral, adoptan su forma. Este efecto se visualiza sobre todo cuando las olas "rompen" dando lugar a una vistosa curva de espuma blanca.

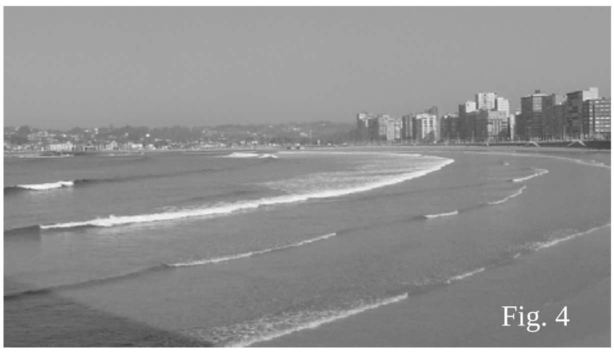

Fig. 4

c) Basándote en el resultado del apartado (a), haz un razonamiento para justificar que la dirección de propagación de las olas que llegan a la playa es perpendicular a la línea del litoral.

Solución P3.- Refracción de olas.

a) Según la conocida ley de la refracción, cuando un frente de una onda que viaja por un medio con velocidad v_1 incide sobre la superficie de separación con otro medio, donde la velocidad de propagación es v_2, se cumple[1]

$$v_2 \operatorname{sen}\theta_1 = v_1 \operatorname{sen}\theta_2 \qquad (1)$$

donde θ_1 y θ_2 son los ángulos que forma la dirección de propagación de la onda (rayo) en ambos medios con la normal a la superficie de separación, como se indica en la figura 5. Una igualdad análoga a (1) se cumple en la frontera entre los medios 2 y 3.

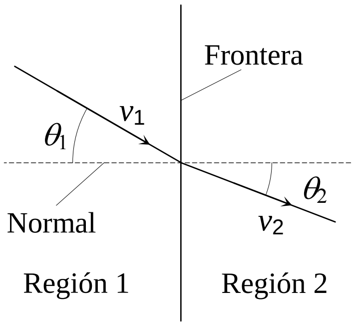

Fig. 5

En nuestro caso, las velocidades de propagación de las olas en las regiones 1, 2 y 3 se obtienen de la gráfica de v frente a h (figura 6).

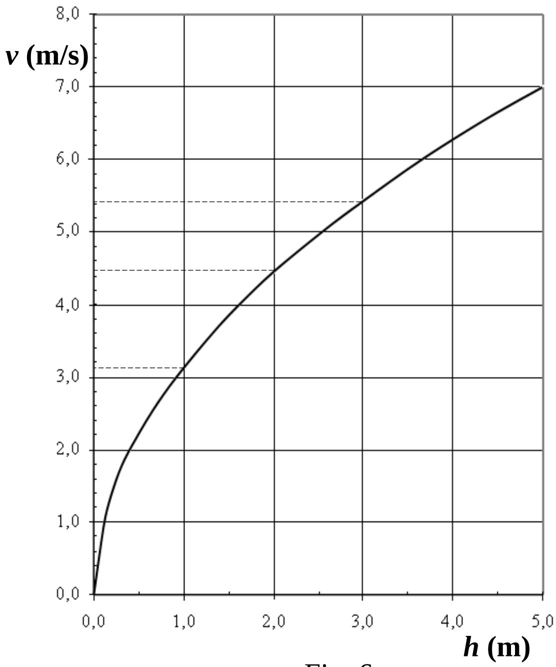

Fig. 6

Estas velocidades son: $v_1 = 4{,}5\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 3{,}1\,\mathrm{m/s}$ y $v_3 = 5{,}4\,\mathrm{m/s}$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{v_2}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta_2 = 16{,}9^{\circ}}$$

$$\operatorname{sen}\theta_3 = \frac{v_3}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{v_3}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta_3 = 30{,}5^{\circ}}$$

b) Como la velocidad en la región 3 es mayor que en el medio 2, el rayo refractado se aleja de la normal. Por lo que habrá un cierto ángulo de incidencia (ángulo límite) para el cual el de refracción será 90º. Para ángulos de incidencia mayores que el límite se producirá el conocido fenómeno de reflexión total. Para estos ángulos no habrá olas en la región 3.

De la ley de la refracción aplicada sucesivamente a las dos fronteras

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{v_1}{v_3}\operatorname{sen}\theta_3$$

Considerando $\theta_3 = 90^{\circ}$, se obtiene el ángulo límite en la región 1

$$\operatorname{sen}\theta_L = \frac{v_1}{v_3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\theta_L = 56{,}4^{\circ}}$$

c) Cuando las olas pasan de una región a otra de menor profundidad, la dirección de propagación se acerca a la normal. Si imaginamos que este proceso se repite en sucesivas disminuciones de profundidad (escalones paralelos), al final los rayos de la ola serán prácticamente perpendiculares a dichos escalones, tal y como se esquematiza en la figura 7.

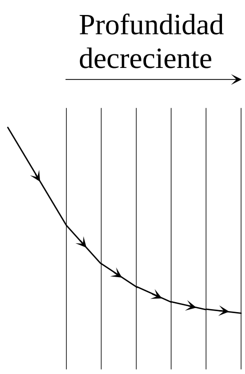

Fig. 7

[1] Quizá para algún lector sea más conocida esta ley en la forma $n_1 \operatorname{sen}\theta_1 = n_2 \operatorname{sen}\theta_2$ (ley de Snell), donde $n_1 = c / v_1$ y $n_2 = c / v_2$ son los índices de refracción de los dos medios. Naturalmente, esta notación sólo tiene sentido estricto para ondas luminosas.

Cuando las olas se acercan a una playa, la profundidad se va reduciendo progresivamente hasta anularse en la línea de costa. Por ello, su dirección de propagación al aproximarse a la costa se va curvando hasta que inciden perpendicularmente a la orilla, como muestra la fotografía de la figura 4. Es decir, las olas (frentes de ondas) llegan paralelas a la orilla.

Desde un punto de vista más matemático, el resultado anterior puede razonarse de la siguiente forma: la disminución progresiva de profundidad al acercarse a la costa puede describirse mediante una serie de sucesivos y estrechos medios con profundidad escalonada decreciente. Teniendo en cuenta (1), en las sucesivas fronteras debe cumplirse

$$\frac{1}{v_1}\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{1}{v_2}\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{1}{v_3}\operatorname{sen}\theta_3 = \ldots$$

Es decir, se mantiene constante el cociente

$$\frac{1}{v}\operatorname{sen}\theta = \mathrm{cte} \qquad (2)$$

Al acercarse las olas a la playa la profundidad tiende a cero, luego su velocidad de propagación tiende a anularse (véase el gráfico de la figura 1). Por tanto, para que el cociente indicado en (2) sea constante, también debe tender a cero el ángulo θ en todos los puntos de la costa, es decir la dirección de propagación tiende a ser perpendicular a la línea de costa.