

## P1 El puenting.

Seguramente conoces o has visto algún reportaje sobre uno de los deportes de riesgo más llamativos, el “puenting” (*bungee jumping* en inglés<sup>1</sup>). Consiste en saltar desde lo alto de un puente con los tobillos sujetos a una cuerda elástica, que frena la caída con suavidad, como se muestra en la foto de la figura 1. Aunque una descripción realista del movimiento es bastante compleja, no es difícil analizar aproximadamente sus dos primeras fases: en la primera, el saltador cae libremente con la cuerda destensada, y en la segunda la cuerda se estira elásticamente hasta detener la caída del saltador en su punto más bajo. En esta segunda fase puede aceptarse que la cuerda cumple la ley de Hooke, es decir que se comporta como un muelle ideal de constante  $k$ .



Fig. 1

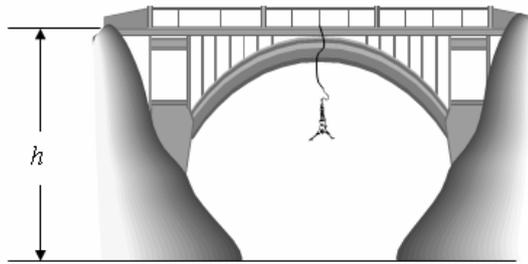


Fig. 2

Supongamos que un aficionado al puenting dispone de una cuerda de longitud  $L = 48$  m y quiere usarla para saltar desde un puente de altura  $h = 98$  m (figura 2). Naturalmente, antes de lanzarse quiere tener ciertas garantías de que su cuerda es adecuada. En particular quiere saber si la longitud máxima que llegará a alcanzar la cuerda cuando se estire,  $L_{max}$ , es menor que la altura  $h$ , ya que en caso contrario su integridad física se vería gravemente amenazada.

Para tener un dato experimental sobre la elasticidad de la cuerda, este aficionado al puenting se cuelga de la cuerda y comprueba que, en equilibrio, se alarga  $\Delta L = 12$  m.

- Despreciando la resistencia del aire y suponiendo que el saltador se deja caer sin velocidad inicial, haz una estimación de la longitud máxima que llegará a tener la cuerda,  $L_{max}$ . ¿Es prudente utilizar esta cuerda para saltar desde el puente indicado?
- En el proceso de caída, la cuerda empieza a jugar su papel cuando la distancia recorrida por el saltador supera la longitud “natural”  $L$  de la cuerda y comienza a estirarse hasta su longitud máxima, cuando el saltador se detiene. Haz una representación gráfica de la aceleración del saltador en función de la distancia vertical,  $y$ , recorrida desde la parte superior del puente,  $y = 0$ , hasta el punto más bajo de la caída,  $y = L_{max}$ . Durante este proceso de caída ¿cuál es la aceleración máxima a la que se ve sometido el saltador?
- Supuesto que la masa del saltador es  $m = 70$  kg, calcula la máxima fuerza que ha de soportar el enganche de la cuerda con el puente.
- Por prudencia, el aficionado al puenting decide utilizar dos cuerdas iguales en paralelo. Esto significa que el muelle equivalente a las dos cuerdas tiene una constante elástica doble,  $2k$ . ¿Qué longitud máxima llegarán a alcanzar las dos cuerdas? ¿Cuál será la aceleración máxima del saltador en estas condiciones?

Aceleraciones comprendidas entre  $4g$  y  $6g$  pueden producir lesiones si no se adoptan medidas de seguridad adecuadas. Teniendo esto en cuenta, ¿es conveniente usar una cuerda “doble” para realizar un salto más seguro?

**Advertencia:** Aunque hayas sido capaz de resolver todas las preguntas de este problema, no creas que estás capacitado para hacer un salto de estas características. El puenting es un deporte de alto riesgo y es necesario un entrenamiento dirigido por una persona especialmente preparada.

---

<sup>1</sup> Las primeras referencias de este tipo de saltos datan de 1930, cuando se descubrió que eran realizados por los indígenas de la isla Vanuatu (Islas de Pentecostés) con lianas sujetas a los pies, para probar su valor. En el club de deportes de riesgo de Bristol se realizaron en 1979 los primeros saltos con una cuerda elástica de 78 m.

## Solución

- a) Despreciando la resistencia del aire, suponiendo que el saltador se deja caer sin velocidad inicial y aceptando que la cuerda se comporta como un muelle ideal de constante  $k$ , en el proceso del salto se conserva la energía mecánica. Si consideramos como nivel de referencia para la energía potencial gravitatoria el punto más bajo que alcanza el saltador se tiene que

$$mg[L + (\Delta L)_{max}] = \frac{1}{2}k(\Delta L)_{max}^2 \quad (1)$$

donde  $(\Delta L)_{max}$  es el alargamiento máximo que experimenta la cuerda.

Por otra parte, como la cuerda se alarga  $\Delta L$  cuando el “aficionado” se cuelga de ella y permanece en equilibrio, se verifica que

$$k\Delta L = mg \quad (2)$$

Combinando (1) y (2) se llega a la siguiente ecuación de segundo grado

$$(\Delta L)_{max}^2 - 2\Delta L(\Delta L)_{max} - 2L\Delta L = 0$$

cuya solución es

$$(\Delta L)_{max} = \Delta L \pm \sqrt{\Delta L^2 + 2L\Delta L}$$

Sustituyendo los datos numéricos del enunciado y prescindiendo del valor negativo de la solución, que no tiene sentido físico, se obtiene

$$(\Delta L)_{max} = 48 \text{ m}$$

Por tanto, la longitud máxima que llega a alcanzar la cuerda es

$$L_{max} = L + (\Delta L)_{max} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{max} = 96 \text{ m}}$$

Aunque  $L_{max} < h = 98 \text{ m}$ , la diferencia es muy pequeña, máxime si se tiene en cuenta que el aficionado al puenting tiene una estatura no despreciable y se lanza con la cuerda atada a sus tobillos, como se aprecia en la figura 1. En un cálculo más realista debería tenerse en cuenta la distancia de su centro de masas a sus pies en el momento de lanzarse, y a su cabeza en el punto más bajo. Sin necesidad de hacer cálculos, como su altura es de unos dos metros, se comprende que su salud puede sufrir un serio quebranto si decide hacer el salto en las condiciones descritas.

- b) La cuerda no juega ningún papel mientras la distancia recorrida en la caída sea menor que su longitud  $L$ , por lo que el saltador cae con una aceleración constante  $g$ . Desde que la cuerda comienza a estirarse sobre el saltador actúa, además de su peso, la fuerza recuperadora que es proporcional al estiramiento,  $y - L$ . Considerando como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y sentido positivo hacia abajo, la segunda ley de Newton permite escribir,

$$\begin{aligned} \text{para } 0 \leq y \leq L & \quad ma = mg \\ \text{para } L \leq y \leq L_{max} & \quad ma = mg - k(y - L) \end{aligned} \quad (3)$$

Por tanto, en la primera fase de la caída, la aceleración con que se mueve el saltador es

$$a = g \quad \text{para } 0 \leq y \leq L$$

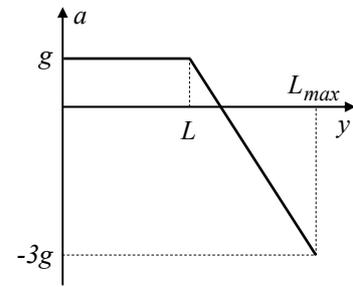
Y en la segunda fase, teniendo en cuenta (2), la aceleración en función de  $y$  es

$$a(y) = -\frac{g}{\Delta L}y + g\left(1 + \frac{L}{\Delta L}\right) \quad \text{para } L \leq y \leq L_{max} \quad (4)$$

Para  $y = L$ , esta aceleración coincide con  $g$ . Para  $y = L_{max} = L + (\Delta L)_{max}$  la aceleración toma su valor máximo (en valor absoluto), dado por

$$a_{max} = g\left(1 - \frac{(\Delta L)_{max}}{\Delta L}\right) \Rightarrow \quad \boxed{a_{max} = -3g}$$

Entre estos dos extremos la dependencia (4) de la aceleración con  $y$  es lineal, por lo que la gráfica que se pide es la de la figura 3.



- c) El enganche de la cuerda con el puente tiene que soportar la tensión de la cuerda que es igual a la fuerza elástica,  $k(y-L)$ . Por lo tanto, la máxima fuerza que tiene que soportar el enganche es

$$F_{max} = k(\Delta L)_{max} = mg \frac{(\Delta L)_{max}}{\Delta L} = 4mg$$

Es decir

$$F_{max} = 2,7 \cdot 10^3 \text{ N}$$

- d) Si el aficionado al puenting utiliza dos cuerdas iguales en paralelo, la constante del muelle equivalente es  $2k$ , como indica el enunciado. La cuerda doble es más “dura”, el alargamiento máximo,  $(\Delta L)'_{max}$ , es menor y el frenado más brusco, con mayor aceleración.

El cálculo de  $(\Delta L)'_{max}$  se realiza partiendo de la ecuación (1) cambiando la constante del muelle por  $2k$ . De esta forma, la ecuación de segundo grado que se obtiene es

$$\left[ (\Delta L)'_{max} \right]^2 - \Delta L (\Delta L)'_{max} - L \Delta L = 0 \quad \Rightarrow \quad (\Delta L)'_{max} = 31 \text{ m}$$

La longitud máxima que alcanza la cuerda en este caso es

$$L'_{max} = 79 \text{ m}$$

La nueva aceleración  $a'$  se obtiene como en (3), pero cambiando la constante del muelle

$$ma' = mg - 2k(L - y)$$

Teniendo en cuenta (2)

$$a' = g \left( 1 - \frac{2(L - y)}{\Delta L} \right)$$

Por lo que la aceleración máxima es

$$a'_{max} = g \left( 1 - \frac{2(\Delta L)'_{max}}{\Delta L} \right) \Rightarrow \quad a'_{max} = -4,1g$$

En efecto, el frenado es bastante más brusco y el valor de la aceleración máxima está dentro del margen peligroso, por lo que no es conveniente realizar los saltos con una cuerda doble.

## P2 Baroscopio.

El *baroscopio* es un aparato que se utiliza para comprobar indirectamente el principio de Arquímedes. Consta de una balanza de cuyos brazos se suspenden dos esferas, una hueca y otra maciza de mucho menor tamaño. En la figura 1 se esquematiza un baroscopio con balanza de brazos iguales, y en la figura 2 se muestra el baroscopio de una colección de instrumentos científicos antiguos.

Una vez equilibrada la balanza, es decir con sus brazos horizontales y el fiel marcando el centro de la escala (situación de la figura 1), se coloca el aparato en el interior de una campana de vidrio. Al hacer el vacío dentro de la campana, la balanza se desequilibra y alcanza una nueva posición de equilibrio con los brazos inclinados y el fiel desviado (situación de la figura 2).

La esfera hueca tiene un radio  $R = 5,00$  cm y su masa es  $M = 40,0$  g. A temperatura ambiente, la presión antes de hacer el

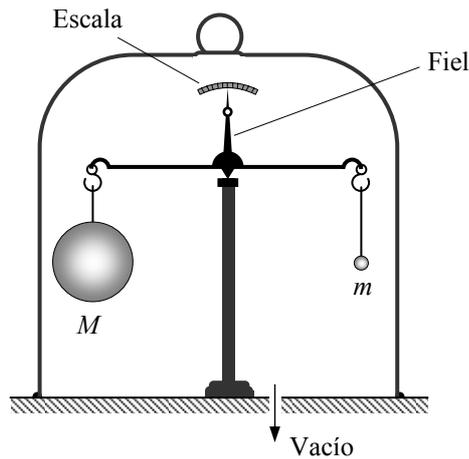


Fig. 1

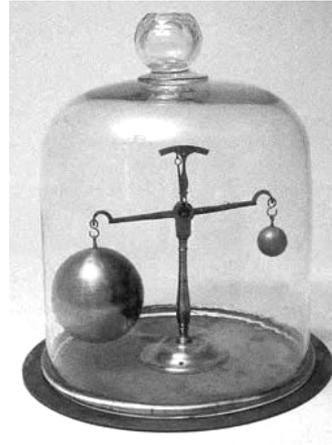


Fig. 2

vacío es la atmosférica,  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Pa y, en estas condiciones, la densidad del aire es  $\rho_{\text{aire}} = 1,30$  kg/m<sup>3</sup>.

La resolución de la balanza es de 100 mg, es decir, una variación entre las masas suspendidas de 100 mg hace que el fiel se desvíe una división de la escala.

Considerando que el aire se comporta como un gas perfecto y que el volumen de la esfera maciza es despreciable frente al de la hueca, responde a las siguientes cuestiones:

- a) Antes de hacer el vacío:
  - 1) Calcula el empuje sobre la esfera hueca.
  - 2) Determina la masa  $m$  de la esfera maciza para que la balanza esté equilibrada.
- b) Después de hacer el vacío y suponiendo que la temperatura no ha cambiado:
  - 1) ¿Hacia qué lado se desequilibra la balanza? Razona tu respuesta.
  - 2) Si el fiel de la balanza se desvía 6 divisiones, ¿cuál es la presión en el interior de la campana?

## Solución

- a1) El teorema de Arquímedes, conocido por todos desde casi la más tierna infancia, establece que *todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta una fuerza ascensional igual al peso del volumen de fluido desalojado*. De acuerdo con ello, antes de haber hecho vacío en el interior de la campana, el empuje que experimenta la esfera grande de la balanza viene dado por

$$B = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{aire}} g \quad (1)$$

Numéricamente

$$B = 6,68 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

- a2) El peso aparente de la esfera grande es igual a su propio peso menos este empuje. En la esfera maciza el empuje es despreciable debido a su pequeño tamaño. Como los brazos de la balanza son iguales, en equilibrio mecánico se cumple

$$Mg - B = mg \quad \Rightarrow \quad m = M - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{aire}} \quad \Rightarrow \quad m = 3,93 \cdot 10^{-2} \text{ kg}$$

- b1) Cuando se hace vacío disminuye la masa de aire encerrado en el volumen de la campana y, por tanto, disminuye su densidad y también el empuje sobre la esfera grande. Su peso aparente aumenta y la balanza se desequilibra hacia la izquierda, como se observa en la figura 2 del enunciado.

- b2) El fiel marca una desviación de  $\beta = 6$  divisiones cuando, hecho el vacío, se alcanza el nuevo equilibrio mecánico. Como la resolución de la balanza es  $r = 100$  mg/división, la desviación del fiel significa que el peso aparente de la esfera grande ha aumentado una cantidad  $r\beta g$ , que realmente corresponde a una disminución del empuje hidrostático

$$\Delta B = r\beta g$$

El nuevo empuje  $B'$  será entonces

$$B' = B - r\beta g \quad (2)$$

Si llamamos  $\rho'_{\text{aire}}$  a la densidad del aire residual en la campana, se tendrá que

$$B' = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho'_{\text{aire}} g \quad (3)$$

Combinando (1), (2) y (3) se obtiene

$$\rho_{\text{aire}} - \rho'_{\text{aire}} = \frac{3\beta r}{4\pi R^3} \quad (4)$$

La densidad del aire puede relacionarse con la presión mediante la ecuación de los gases perfectos. Si  $V$  es el volumen de la campana,  $n$ ,  $n'$ ,  $p_0$  y  $p$  los números de moles de aire y las presiones antes y después de hacer el vacío

$$p_0 V = nRT \quad , \quad pV = n'RT$$

Llamando  $M_m$  a la masa molar del aire

$$\rho_{\text{aire}} = nM_m / V \quad , \quad \rho'_{\text{aire}} = n'M_m / V$$

Luego

$$p_0 = \frac{\rho_{\text{aire}}}{M_m} RT \quad , \quad p = \frac{\rho'_{\text{aire}}}{M_m} RT$$

De las relaciones anteriores se deduce que

$$\rho'_{\text{aire}} = \rho_{\text{aire}} \frac{p}{p_0}$$

Llevando esta expresión a (4) se obtiene finalmente

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{3\beta r}{4\pi R^3 \rho_{\text{aire}}} \right) \quad \Rightarrow \quad p = 1,20 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,118 \text{ atm}$$

### P3 Espectroscopia con red de difracción.

#### 1) Fundamento teórico

Como sabrás, cada especie atómica puede absorber y emitir luz de una serie de longitudes de onda (espectros atómicos de absorción y emisión), relacionadas con las transiciones de los átomos entre sus diversos niveles de energía.

Los instrumentos de observación y medida de estos espectros se conocen como *espectroscopios*, uno de cuyos componentes esenciales es el elemento *dispersor*. Cuando sobre él incide un haz de luz policromática (de varias longitudes de onda), lo divide en varios haces monocromáticos, uno para cada longitud de onda, que viajan en direcciones diferentes.

Para este fin puede emplearse un prisma de vidrio, como se esquematiza en la figura 1, pero en este problema se va a usar como elemento dispersor una *red de difracción*.

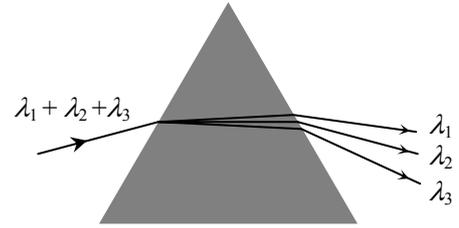


Fig. 1

En esencia, una red de difracción puede describirse como un gran número de rendijas muy estrechas, paralelas y equiespaciadas. La luz incidente se difracta en todas direcciones en cada rendija, y los haces difractados en una cierta dirección por todas las rendijas interfieren entre sí. Como resultado, la luz es transmitida por la red en una serie de direcciones muy bien definidas (llamadas *órdenes de difracción*) para cada longitud de onda, correspondientes a las direcciones de interferencia constructiva.

La ecuación que relaciona la longitud de onda de la luz incidente con los ángulos de desviación en los diversos órdenes de difracción es muy fácil de deducir: En la figura 2 se representan dos rendijas adyacentes separadas una distancia  $d$  (conocida como *periodo de la red*) sobre las que incide luz monocromática de longitud de onda  $\lambda$ . Los haces difractados a un ángulo  $\theta$  respecto a la dirección de incidencia interferirán constructivamente<sup>2</sup> cuando la diferencia de caminos ópticos entre ambos sea un múltiplo entero de  $\lambda$ . Este razonamiento es extensible a todas las rendijas.

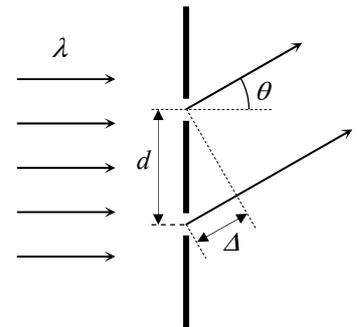


Fig. 2

$$\Delta = m\lambda \quad \text{con} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

De la geometría de la figura 2 se deduce

$$\Delta = d \sin \theta$$

Por tanto, la *ecuación de la red* queda<sup>3</sup> (véase la figura 3)

$$d \sin \theta_m = m\lambda \quad (1)$$

Si la luz incidente es policromática, la red de difracción separa las diversas componentes espectrales, dentro de cada orden de difracción (excepto el 0), como se esquematiza en la figura 4.

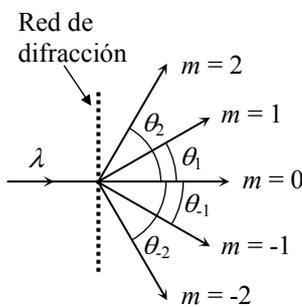


Fig. 3

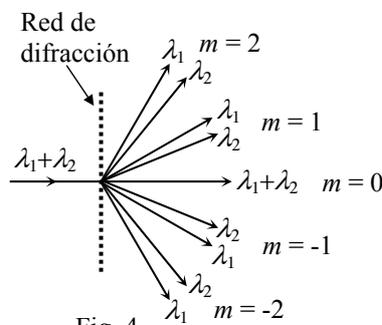


Fig. 4

<sup>2</sup> En el  $\infty$  o en el plano focal de una lente convergente (por ejemplo en la retina de nuestro ojo).

<sup>3</sup> Esta ecuación no depende del número total de rendijas de la red. Interesa que este número sea muy alto para mejorar el *poder resolutivo* de la red, es decir para que la difracción de cada  $\lambda$  se produzca dentro de un margen angular muy estrecho. De esta forma se pueden observar separadas (resueltas) longitudes de onda próximas y determinar con gran precisión el valor de cada  $\lambda$ . El poder resolutivo de una red de difracción suele ser muy superior al de un prisma.

## 2) Datos experimentales.

Imagina que dispones de un espectroscopio de red con el que quieres determinar experimentalmente las longitudes de onda del espectro del Na. No conoces el periodo  $d$  de la red de difracción, por lo que, para determinar este parámetro y tener *calibrado* el espectroscopio, es necesario realizar unas medidas previas con luz de espectro conocido.

### 2.1) Calibrado del espectroscopio de red.

Se dispone de una lámpara espectral de Hg – Cd, que emite en longitudes de onda visibles conocidas. Se miden con el espectroscopio de red los ángulos de desviación en primer orden de difracción ( $m = 1$ ) de estas longitudes de onda, obteniendo los resultados que se recogen en la Tabla I.

### 2.2) Espectro del Na.

A continuación se miden las desviaciones angulares, también en primer orden de difracción, de las líneas visibles de una lámpara espectral de Na, obteniendo los resultados de la Tabla II.

Tabla I. Lámpara de Hg - Cd

Color	Elemento	$\lambda$ (nm)	$\theta_1$ (°)
Violeta	Hg	404,6	14,14
Azul/violeta	Hg	435,8	15,26
Azul	Cd	467,8	16,40
Azul	Cd	480,0	16,86
Verde	Cd	508,5	17,90
Amarillo/verde	Hg	546,0	19,24
Amarillo	Hg	576,9	20,39
Amarillo	Hg	579,0	20,49
Rojo	Cd	643,8	22,90

Tabla II. Lámpara de Na

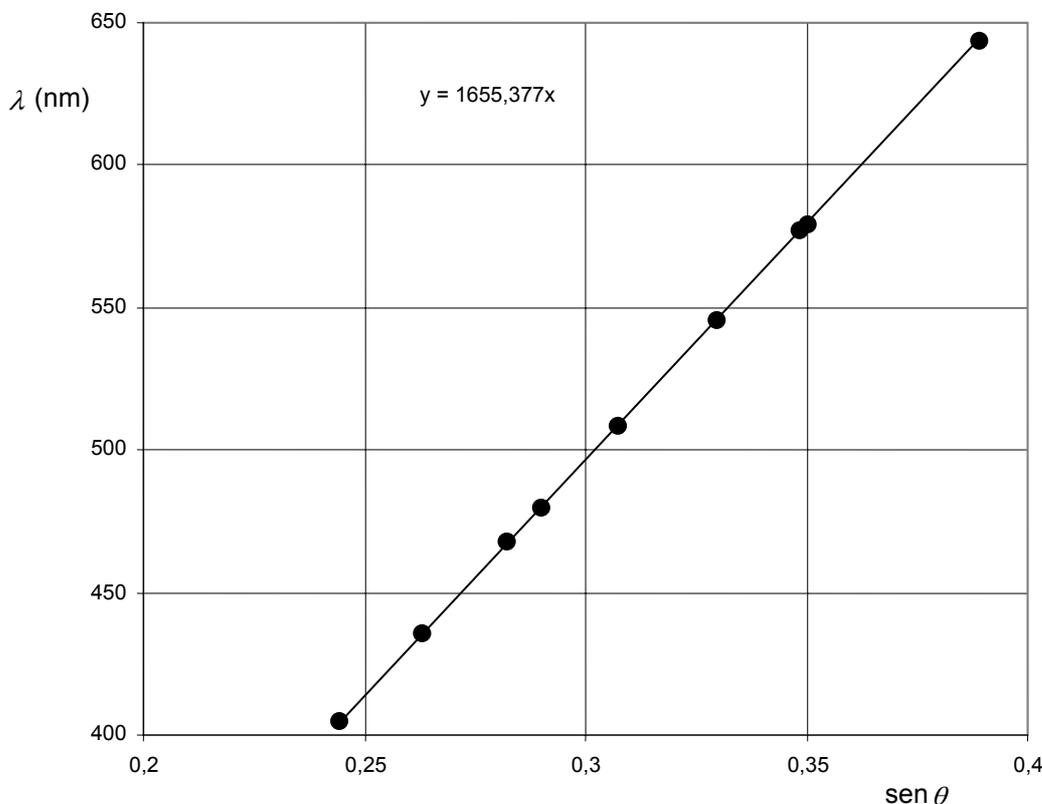
Color	$\theta_1$ (°)
Verde/ azul	17,51
Verde	18,14
Amarillo	20,84
Amarillo	20,87
Rojo	21,82
Azul	34,36

## 3) Tareas y preguntas.

- Representa gráficamente en el papel milimetrado los puntos experimentales  $(x, y) = (\text{sen}\theta_1, \lambda)$  de la tabla I.
- Ajusta estos puntos experimentales a una línea recta.
- Teniendo en cuenta la ecuación de la red (1), deduce el periodo,  $d$ , de la red de difracción empleada.
- A partir de los datos de la Tabla II, determina las longitudes de onda visibles del espectro del Na.
- Haz una estimación de la incertidumbre (margen de error) de estas longitudes de onda.
- Una de las medidas presentadas en la Tabla II es claramente errónea. ¿Cuál de ellas? Piensa cuál puede ser la causa de este error e intenta remediarlo.

## Solución

a, b) La gráfica pedida se muestra a continuación, junto con su ajuste a una línea recta. La recta debe pasar por el origen, puesto que la ecuación de la red (1) prevé una proporcionalidad directa entre  $\lambda$  y  $\text{sen } \theta$ .



El ajuste que se presenta ha sido realizado con Excel, aplicando la herramienta "agregar línea de tendencia" a los puntos experimentales, con la opción de que la recta pase por el origen ("señalar intersección = 0"). Los cálculos que realiza esta herramienta corresponden al método clásico de ajuste a una línea recta por "mínimos cuadrados". Este tipo de ajuste también puede realizarse fácilmente con muchas calculadoras científicas, que tienen preprogramados estos cálculos con el nombre de "regresión lineal" o similar.

Este ajuste también puede realizarse con buena precisión sobre la gráfica dibujada a mano en papel milimetrado. Para ello, debe trazarse "a ojo" la recta que mejor pasa por los puntos experimentales y tomar dos puntos alejados sobre esta recta. Si las coordenadas de estos dos puntos son  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ , la pendiente de la recta es  $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$ .

c) Teniendo en cuenta la ecuación de la red (1), la pendiente de la recta ajustada es el periodo de la red, es decir

$$d = 1655,4 \text{ nm}$$

Se da este resultado con cinco cifras significativas, ya que los datos del problema están dados con cuatro cifras significativas y es de esperar que el ajuste a una línea recta de nueve puntos experimentales mejore apreciablemente la precisión.

Como los puntos experimentales tienen una incertidumbre muy pequeña (datos con cuatro cifras significativas) y están muy bien alineados, no es posible en este problema hacer una estimación de la incertidumbre de la pendiente trazando las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Un cálculo estadístico que no detallaremos aquí, por no ser exigible a estudiantes de Bachillerato, conduce a que el error típico de la pendiente es de 0,4 nm, lo que confirma el número de cifras significativas con que debe expresarse el valor de  $d$ .

### Método alternativo<sup>5</sup> para obtener $d$ :

Teniendo en cuenta la ecuación (1), el periodo de la red puede obtenerse, para cada longitud de onda, en la forma

$$d = \frac{\lambda}{\text{sen}\theta_1}$$

Los valores obtenidos en cada caso se recogen en la última fila de la siguiente tabla

$\lambda$ (nm)	404,6	435,8	467,8	480,0	508,5	546,0	576,9	579,0	643,8
$\theta_1$ (°)	14,14	15,26	16,40	16,86	17,90	19,24	20,39	20,49	22,90
sen $\theta_1$	0,244292	0,263200	0,282341	0,290034	0,307357	0,329526	0,348408	0,350044	0,389124
$d$ (nm)	1656,21	1655,78	1656,86	1654,98	1654,430	1656,93	1655,82	1654,08	1654,49

El valor medio de estos periodos es  $\bar{d} = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^9 d_i = 1655,51$  nm

Y su error típico es 
$$\Delta d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (d_i - \bar{d})^2}{9 \times 8}} = 0,35$$
 nm

Por tanto, el resultado para el periodo de la red sería  $d = (1655,5 \pm 0,4)$  nm, que coincide casi exactamente con el obtenido a partir del ajuste a una recta de los puntos experimentales.

- d) Una vez determinado  $d = 1655,4$  nm, es inmediato calcular las longitudes de onda de las líneas visibles del Na, correspondientes a los ángulos de desviación en primer orden dados en la Tabla II, sin más que aplicar la ecuación de la red

$$\lambda = d \text{sen}\theta_1$$

Los resultados aparecen en la última fila de la siguiente tabla.

<b>Color</b>	Verde/azul	Verde	Amarillo	Amarillo	Rojo	Azul
$\theta_1$ (°)	17,51	18,14	20,84	20,87	21,82	34,36
sen $\theta_1$	0,300872	0,311340	0,355760	0,356249	0,371692	0,564391
$\lambda$ (nm)	498,1	515,4	588,9	589,7	615,3	934,3

- e) Hay varias formas de hacer una estimación de la incertidumbre de las longitudes de onda obtenidas para el espectro del Na. Veamos algunas de ellas:

La más sencilla y directa consiste en suponer que esta incertidumbre es análoga a la desviación media que presenten los valores de las  $\lambda$ 's de la lámpara de Hg – Cd respecto a los obtenidos con la recta de calibración. Así, por ejemplo, para la línea violeta del Hg esta desviación es

$$\Delta\lambda_{vio} = 404,6 - 1655,4 \text{sen}(14,14) = 0,20$$
 nm

Si se calculan estas desviaciones para todas las líneas espectrales y se hace un promedio de sus valores absolutos (o se calcula su valor cuadrático medio) se obtiene una desviación típica

$$\Delta\lambda = 0,3$$
 nm

<sup>5</sup> Este método es estadísticamente menos exacto que el anterior.

Por extensión, este valor es una estimación razonable para la incertidumbre de las longitudes de onda de la otra lámpara, si se mide en las mismas condiciones experimentales. Nótese que la incertidumbre de  $\lambda$ , expresada en nm, está en el primer decimal. Por ello, las longitudes de onda del Na se han dado con un solo decimal en la tabla del apartado anterior.

También puede hacerse una estimación de  $\Delta\lambda$  teniendo en cuenta que la principal fuente de error en este experimento es la incertidumbre con que se miden los ángulos  $\theta_1$  (al fin y al cabo, ésta es la única medida experimental directa). Si se observan las tablas del enunciado, todos los ángulos están dados con dos cifras decimales, lo que sugiere que se ha medido con un instrumento (goniómetro) que tiene una resolución  $\Delta\theta = 0,01^\circ$ . Los ángulos de desviación medidos están en torno a  $19^\circ$  por lo que el margen de error transmitido a los valores de  $\lambda$  está en torno a

$$\Delta\lambda_\theta = 1655,4(\text{sen}19,01 - \text{sen}19) = 0,27 \text{ nm}$$

Un cálculo más preciso debe tener además en cuenta que el valor de  $d$  también tiene una incertidumbre, que se transmite a las  $\lambda$ 's del Na. Aceptando el valor  $\Delta d = 0,4 \text{ nm}$  calculado en el apartado c), la incertidumbre transmitida es del orden de

$$\Delta\lambda_d = (1655,8 - 1655,4)\text{sen}19 = 0,13 \text{ nm}$$

La incertidumbre total puede calcularse sumando las dos contribuciones anteriores, o, si se quiere ser estadísticamente más preciso, en la forma

$$\Delta\lambda = \sqrt{\Delta\lambda_\theta^2 + \Delta\lambda_d^2} = 0,3 \text{ nm}$$

El resultado final de la incertidumbre se da con una única cifra significativa pues se han hecho estimaciones y cálculos con un grupo reducido de medidas experimentales.

Los valores de  $\Delta\lambda_\theta$  y  $\Delta\lambda_d$  pueden calcularse de una forma matemáticamente más elegante (pero no más exacta), mediante un desarrollo en serie a primer orden:

$$\Delta\lambda_\theta = \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \Delta\theta = d \cos\theta \Delta\theta = 0,27 \text{ nm} \quad (\text{Atención: } \Delta\theta \text{ debe expresarse en radianes})$$

$$\Delta\lambda_d = \frac{\partial\lambda}{\partial d} \Delta d = \text{sen}\theta \Delta d = 0,13 \text{ nm}$$

- f) En las Tablas I y II del enunciado se observa que los menores ángulos de desviación corresponden a los colores violeta y azul, y que estos ángulos crecen hacia el extremo rojo del espectro visible. La única excepción es el último dato de la Tabla II, en el que una línea de color azul tiene un ángulo de desviación superior a la roja anterior. El ángulo de esta línea azul del Na es del orden del doble del correspondiente a las líneas azules del Cd de la Tabla I. Además, la longitud de onda obtenida en d) para esta línea es 934,3 nm, que está en el infrarrojo<sup>6</sup> y no sería visible. En conclusión, ésta es la medida errónea.

La explicación lógica de este error es que no se ha medido el ángulo de desviación de esta línea en primer orden de difracción,  $\theta_1$ , sino en segundo, es decir  $\theta_2$ . Su longitud de onda sería, por tanto,

$$\lambda = \frac{1}{2} d \text{sen}\theta_2 = 467,1 \text{ nm}$$

que sí que corresponde a un color azul.

Un error de este tipo es relativamente fácil de cometer en el laboratorio, porque observando la luz difractada por la red (a simple vista o a través del antejo de un goniómetro) se ven todas las líneas del espectro en primer orden, terminando en las rojas, y a continuación se repiten en segundo orden, comenzando por violetas y azules, siempre con ángulos crecientes.

Para la red empleada en este problema, con  $d = 1655,4 \text{ nm}$  (es decir de 604,1 líneas por milímetro) el espectro visible de primer orden se observa entre  $14^\circ$  y  $27^\circ$ , y el de segundo orden entre  $29^\circ$  y  $65^\circ$ . Las líneas aparecen más separadas en segundo orden que en primero, por lo que el poder resolutivo del espectroscopio es mayor, pero existe el problema de que el tercer orden de difracción aparece a partir de  $46,5^\circ$  y se solapa con el segundo, por lo que aparecen líneas mezcladas y repetidas de estos dos órdenes. Por eso es más cómodo medir en primer orden de difracción.

**Nota final:** los datos presentados en este problema son reales. Se han medido con un espectroscopio equipado con una red de difracción de 600 líneas/mm nominales. La práctica es realizada por los estudiantes de 2º curso de la Diplomatura de Óptica y Optometría en la asignatura Óptica Física. Las longitudes de onda reales de las líneas del Na son: 466,9; 498,3; 515,1; 589,0; 589,6 y 615,7 nm. Las líneas cuarta y quinta constituyen el conocido doblete amarillo del Na, que con este espectroscopio se ve perfectamente resuelto.

<sup>6</sup> El espectro visible para el ojo humano se extiende, aproximadamente, desde los 400 nm (violeta) hasta los 750 nm (rojo).