SEGUNDA PRUEBA

25 de febrero de 2011

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de un problema de tipo experimental

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!

Subvenciona:

Problema experimental. *Emulando a Galileo*[1]

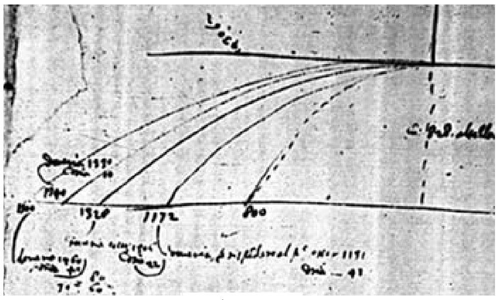


Fig. 1

Galileo Galilei es universalmente considerado uno de los padres de la Ciencia moderna. De entre sus múltiples aportaciones en Astronomía, Matemáticas y Física, vamos a recordar aquí sus estudios experimentales sobre la trayectoria que describe un cuerpo en caída libre.

Por ejemplo, en un manuscrito de 1608 aparece la gráfica de la figura 1, en la que anotó los alcances horizontales de una bolita que caía libremente una cierta altura, para diversos valores de la velocidad inicial horizontal.

A partir de estudios experimentales de este tipo para varias alturas de caída, Galileo dedujo que, si la fricción con el aire es despreciable, la distancia recorrida en horizontal es proporcional al tiempo de vuelo, es decir que la componente horizontal de la velocidad es constante (equivalente a la Ley de Inercia). También comprobó que, para velocidad inicial horizontal, la distancia recorrida en vertical es proporcional al cuadrado del tiempo. Componiendo ambos movimientos, Galileo demostró que la trayectoria de la caída es parabólica.

Los métodos e instrumentos que empleó Galileo para medir distancias y tiempos fueron rudimentarios, aunque notablemente precisos. Con medios más modernos, podríamos emular a Galileo y estudiar experimentalmente una caída libre de la siguiente forma:

Lanzamos una bolita por una mesa horizontal y grabamos lateralmente con una cámara de video de "alta velocidad" su caída al suelo tras abandonar la mesa. Posteriormente extraemos imágenes grabadas a intervalos de tiempo regulares T = 0,040 s, partiendo del instante t = 0 en que la bolita abandona la mesa y comienza su caída libre. En la figura 2 se presentan estas imágenes superpuestas. Se ha tomado origen de coordenadas, O, en el centro de la bolita en su posición inicial de caída, justo cuando abandona la mesa, eje OX horizontal y paralelo a la velocidad inicial de movimiento, v_0, y eje OY vertical.

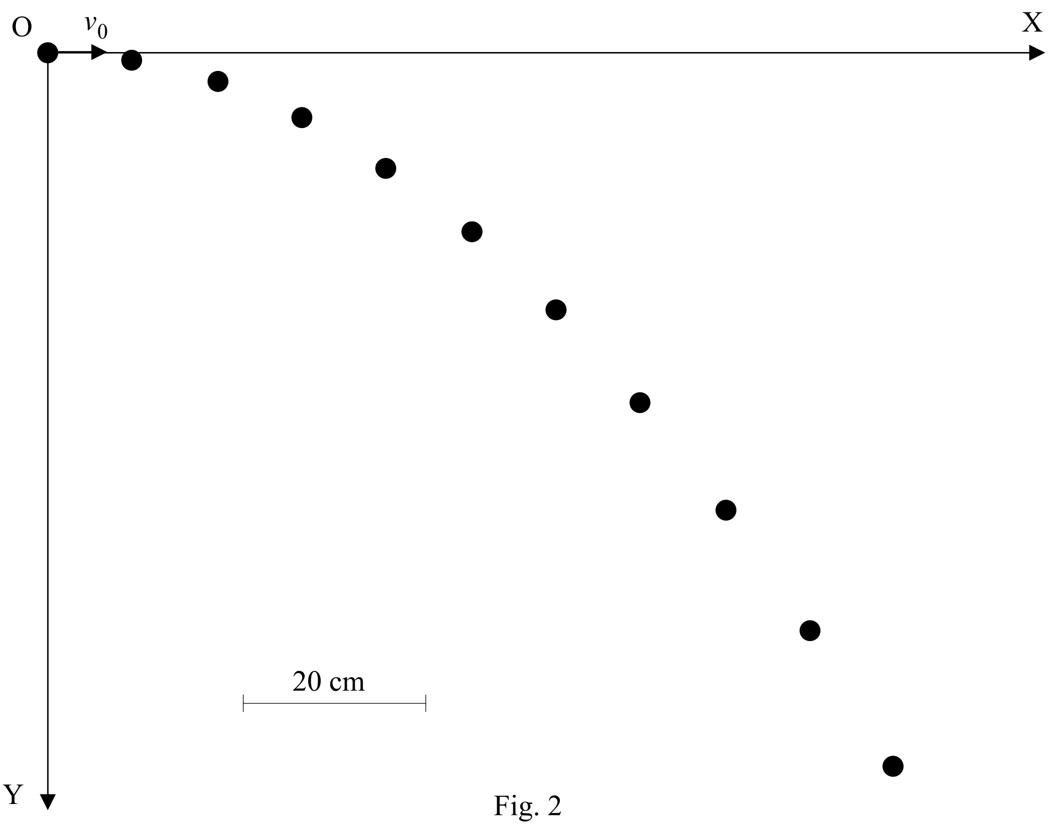


Fig. 2

[1] Este problema experimental está inspirado en una de las pruebas que propuso el Comité Académico local en la XV Olimpiada Iberoamericana de Física (Panamá, 2010).

a) Midiendo con una regla sobre la figura 2 y teniendo en cuenta la escala indicada en ella, construye una tabla con los valores de t, x e y en las sucesivas posiciones de la bolita. Añade en otra columna los valores de t^2, que necesitarás más adelante.

b) Determina, con la mayor precisión posible, el valor de v_0.

c) En una gráfica con t^2 en abscisas e y en ordenadas, dibuja los puntos correspondientes y obtén la pendiente de la recta que, pasando por el origen, mejor se ajusta a dichos puntos.

d) Deduce el valor de la aceleración de la gravedad, g, y haz una estimación de su incertidumbre, Δg.

e) Si la altura de la mesa es h = 80,0 cm, calcula el alcance del tiro parabólico, es decir la x final en el instante del impacto de la bolita con el suelo (supuesta de radio despreciable). Calcula la incertidumbre del alcance debida a la incertidumbre Δg obtenida en el apartado anterior.

Hasta ahora hemos dado por supuesto que, durante la caída, y es proporcional a t^2. Pero Galileo no lo sabía a priori. Intentando de nuevo emular su trabajo, planteemos la hipótesis de que nuestros datos experimentales se ajustan a una dependencia de la forma

$$y = kt^n$$

donde tanto la constante k como el exponente n son desconocidos.

f) ¿Cómo podría demostrarse que la hipótesis es correcta, y que el mejor ajuste corresponde a n = 2? (Es suficiente con que expliques el método que propones; no es necesario que lo apliques a los datos) ç

Solución Problema experimental. *Emulando a Galileo*

a) En la tabla I se recogen las distancias del centro de la bolita a los dos ejes, x_{graf} e y_{graf}, en los instantes $t_m = mT$, con m entero y T = 0,040 s. Estas distancias se han medido con una regla normal, graduada en milímetros, y se ha optado por presentar los datos con una resolución de 0,5 mm.

Para medir, por ejemplo, la coordenada x_{graf} de una posición de la bolita, el método habitual es enrasar el cero de la regla con el eje vertical OY y tomar la lectura de la regla donde esté el centro de la bolita. Como ésta tiene más de dos milímetros de diámetro, abarca varios trazos de la regla y no es fácil precisar más allá de 0,5 mm la posición de su centro. Sin embargo, puede mejorarse la resolución de los datos midiendo al revés: es más preciso enrasar el cero, que tiene un trazo largo, con el centro de la bolita (nuestra vista es bastante hábil en esta tarea, con un error típico ~ 0,1 mm) y medir en la escala de la regla la posición del eje. Como es una línea fina, ahora sería posible interpolar visualmente entre los trazos de sucesivos milímetros y "afinar la lectura" a la décima de mm, con un margen de incertidumbre estimado de ±0,2 mm.

Para obtener los valores reales de x e y es necesario tener en cuenta la escala que se presenta en la gráfica del enunciado. La longitud del segmento representado, medida con la regla, es[2] $L_{graf} = 2{,}40$ cm y corresponde a una longitud real $L = 20\,\text{cm}$. Por tanto, x e y se obtienen multiplicando x_{graf} e y_{graf} por el factor de escala

$$f = \frac{L}{L_{graf}} = \frac{200}{24} = \frac{25}{3}$$

Tabla I

t (s)	t^2 (s^2)	x_{graf} (cm)	y_{graf} (cm)	x (cm)	y (cm)
0,000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
0,040	0,0016	1,10	0,10	9,17	0,83
0,080	0,0064	2,25	0,40	18,75	3,33
0,120	0,0144	3,35	0,85	27,92	7,08
0,160	0,0256	4,45	1,50	37,08	12,50
0,200	0,0400	5,60	2,40	46,67	20,00
0,240	0,0576	6,70	3,40	55,83	28,33
0,280	0,0784	7,80	4,60	65,00	38,33
0,320	0,1024	9,00	6,05	75,00	50,42
0,360	0,1296	10,10	7,65	84,17	63,75
0,400	0,1600	11,20	9,40	93,33	78,33

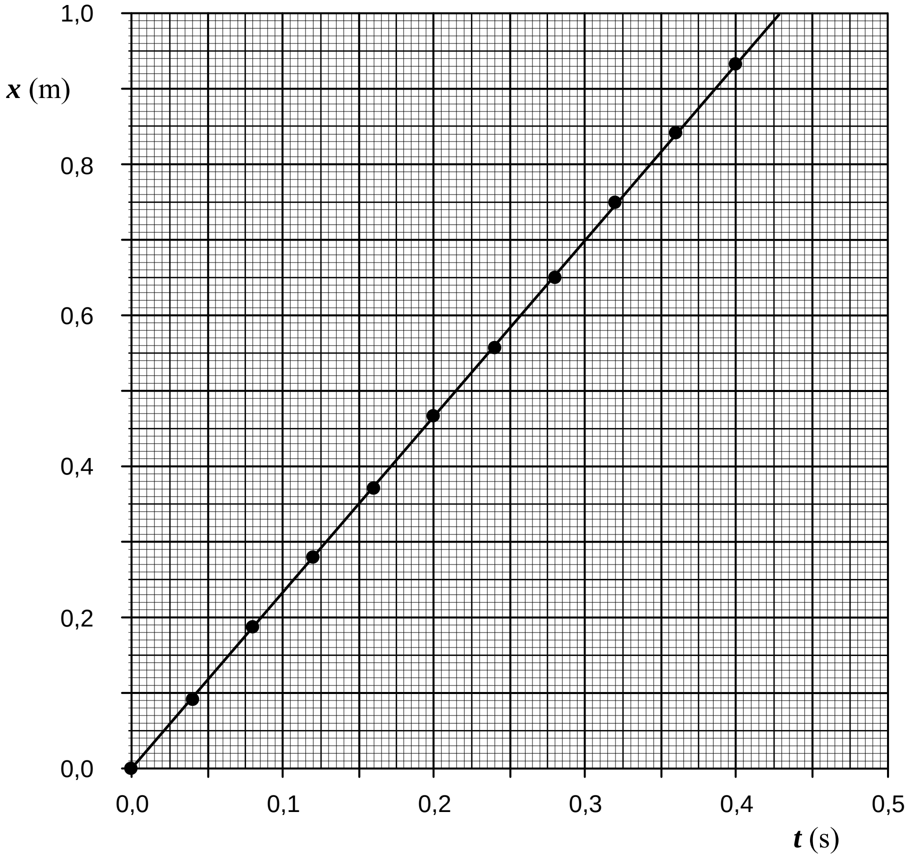
b) Si se acepta que la componente horizontal de la velocidad durante la caída es constante e igual a v_0, ésta velocidad podría determinarse calculando el cociente x/t para cualquiera de las posiciones de la bolita. Para optimizar la precisión del resultado conviene tomar los datos del último punto, que es el que tiene una menor incertidumbre relativa de la posición, $\Delta x/x$, ya que tiene la misma incertidumbre absoluta Δx que los demás y el mayor valor de x. Con esta idea, una estimación razonable (y rápida) de v_0 sería

$$v_0 = \frac{93{,}33 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{0{,}400\ \text{s}} = 2{,}33\ \text{m/s}$$

[2] Los procesos de impresión y fotocopiado pueden introducir pequeños cambios de escala, que afectarían por igual a todas las medidas realizadas con una regla sobre la gráfica, de forma que los valores finales de x e y no deberían verse sistemáticamente afectados.

Un cálculo de propagación de errores, que no detallaremos aquí, partiendo de incertidumbres estimadas $\Delta x_{graf} = 0{,}5$ mm y $\Delta L_{graf} = 0{,}2$ mm conduce a $\Delta v_0 = 0{,}03$ m/s.

Para mejorar la precisión, podría repetirse este proceso de cálculo, $v_0 = x/t$, con las demás posiciones de la bolita y promediar los resultados. Pero es más correcto (y elegante) representar los puntos experimentales en una gráfica con *x* en ordenadas y *t* en abscisas y ajustarlos a una recta que pase por el origen, cuya pendiente es precisamente v_0. A continuación se presenta esta gráfica, con el aspecto que tendría dibujada en papel milimetrado



Se observa que, como era de esperar, los puntos están muy bien alineados en una recta que pasa por el origen. La pendiente de esta recta, es decir v_0, se calcula a partir de las coordenadas de un punto de la recta alejado del origen (para mejorar la precisión del resultado) por ejemplo el último punto en la parte superior derecha de la recta trazada, para el que $(t\,;\,x) = (0{,}429\text{ s}\,;\,1{,}000\text{ m})$.

$$v_0 = \frac{1{,}000\text{ m}}{0{,}429\text{ s}} = 2{,}33\text{ m/s}$$

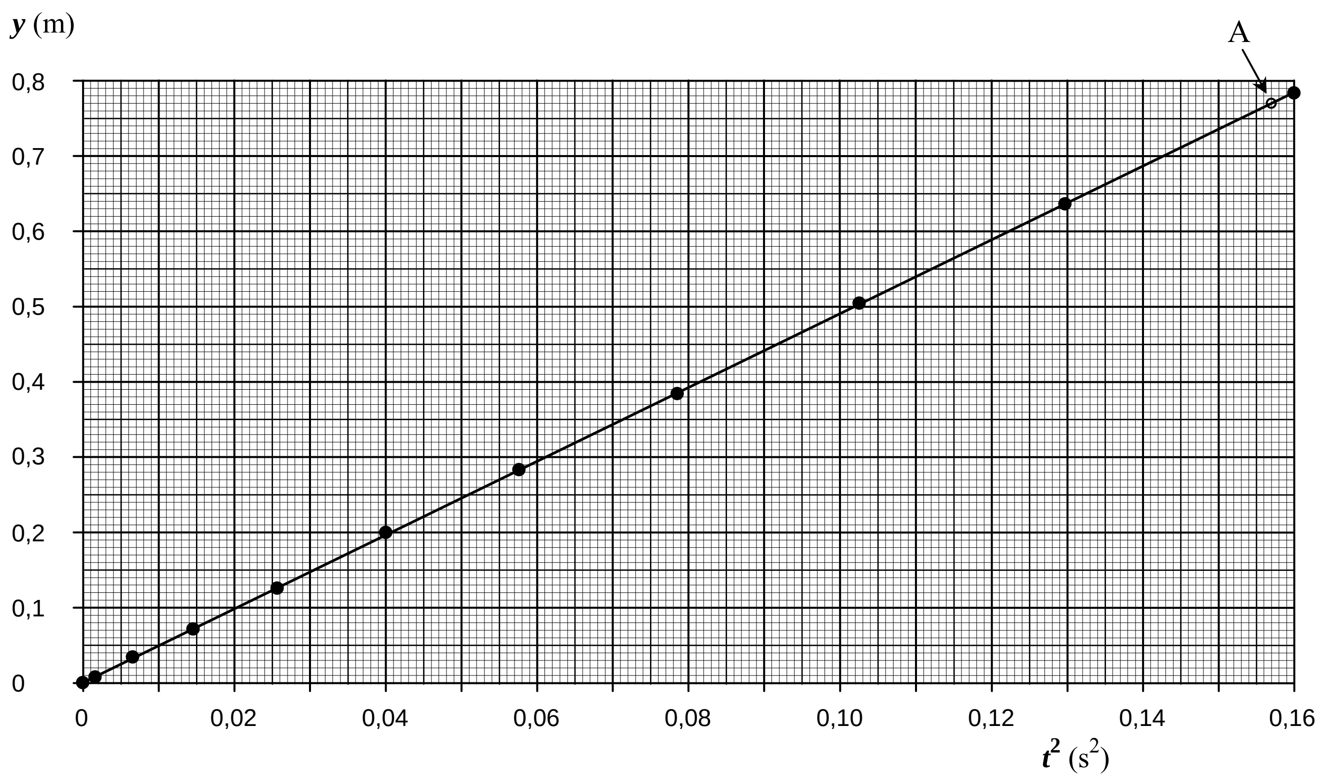
Un ajuste analítico, empleando el método de "mínimos cuadrados", conduce a $v_0 = (2{,}333 \pm 0{,}002)$ m/s.

c) Como la componente vertical de la velocidad inicial es nula y se ha tomado origen en el punto inicial de la caída, se espera que

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

Done *g* es la aceleración de la gravedad. Por tanto, se espera una dependencia $y(t^2)$ lineal, con ordenada en el origen nula y pendiente *g*/2.

En la siguiente gráfica se representan los puntos pedidos que, efectivamente, se ajustan muy bien a una línea recta que pasa por el origen.



De nuevo, la pendiente p de esta recta puede obtenerse a partir de las coordenadas de un punto de la recta alejado del origen, por ejemplo el punto A indicado en la figura, con $(t_A^2\,;y_A) = (0{,}1570\ s^2\,; 0{,}770\ \text{m})$

$$p = \frac{0{,}770\ \text{m}}{0{,}1570\ \text{s}^2} = 4{,}904\ \text{m/s}^2$$

d) La aceleración de la gravedad sería el doble de la pendiente anterior

$$g = 2p = 9{,}808\ \text{m/s}^2$$

Este valor es muy próximo al estándar que solemos recordar[3].

En cuanto a la incertidumbre de este resultado, es obviamente el doble de la incertidumbre Δp de la pendiente de la recta ajustada $y(t^2)$.

Cuando se quiere hacer una estimación "manual" de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como

$$\Delta p = \frac{1}{2}\left(p_{\max} - p_{\min}\right)$$

Pero en nuestro problema los puntos experimentales están tan bien alineados que es imposible trazar estas dos rectas y evaluar sus pendientes. Lo más que podemos hacer sin recurrir a métodos analíticos (fuera de lugar aquí) es estimar la posible falta de precisión al trazar la mejor recta sobre los puntos o al leer en la gráfica las coordenadas del punto auxiliar A sobre dicha recta. Siendo quizá pesimistas, podríamos estimar que, debida a ambas causas, la incertidumbre de la coordenada y del punto A puede ser de medio cuadrito en el papel milimetrado, es decir

$$\Delta y_A = 0{,}005\ \text{m}$$

Con esta estimación, las pendientes máxima y mínima serían

[3] En Zaragoza, a poco más de 200 m sobre el nivel del mar y 41,66º de latitud, el valor real es $g = 9{,}802$ m/s^2.

$$\left.\begin{aligned} p_{max} &= \frac{0{,}775\ \text{m}}{0{,}1570\ \text{s}^2} = 4{,}936\ \text{m/s}^2 \\ p_{min} &= \frac{0{,}765\ \text{m}}{0{,}1570\ \text{s}^2} = 4{,}873\ \text{m/s}^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \Delta g = 2\Delta p = p_{max} - p_{min} = 0{,}06\ \text{m/s}^2$$

Esta incertidumbre afecta a la segunda cifra decimal, por lo que no tiene sentido dar el tercer decimal de g, y el resultado del experimento sería

$$g = (9{,}81 \pm 0{,}06)\ \text{m/s}^2$$

Pero aún hay otra fuente de error que hemos de analizar. Se han medido sobre la gráfica del enunciado los valores de y_{graf} para las diferentes posiciones de la bolita. Estos valores pueden estar afectados de pequeños errores aleatorios que tienden a cancelarse con el posterior proceso de ajuste a una recta, pero si existe un error en el factor de escala f, este error se transmitirá sistemáticamente a todos los valores de la altura y descendida, y a los resultados obtenidos a partir de ellos.

En concreto, hemos medido $L_{graf} = 24{,}0\ \text{mm}$, y una estimación razonable de su incertidumbre, teniendo en cuenta las posibilidades de interpolación visual entre los trazos de la regla, es $\Delta L_{graf} = 0{,}2\ \text{mm}$. Esto supone una incertidumbre relativa

$$\frac{\Delta L_{graf}}{L_{graf}} = 8 \cdot 10^{-3}$$

Aunque la relación de la coordenada y con L_{graf} es inversa, el error relativo transmitido es el mismo (como se discutirá más adelante) es decir

$$y = f\, y_{graf} = \frac{L\, y_{graf}}{L_{graf}} \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta L_{graf}}{L_{graf}}$$

Por tanto, la incertidumbre relativa $8 \cdot 10^{-3}$ (0,8 %) se transmite sistemáticamente a todos los valores de la altura y, a la pendiente p de la gráfica y al valor de g.

$$\frac{\Delta g}{g} = 8 \cdot 10^{-3} \quad \rightarrow \quad \Delta g = 0{,}08\ \text{m/s}^2$$

Combinando las dos fuentes de incertidumbre de g, que son independientes, una estimación final razonable podría ser

$$\Delta g = \sqrt{0{,}06^2 + 0{,}08^2}\ \text{m/s}^2 = 0{,}1\ \text{m/s}^2$$

De forma que el resultado del experimento tendría una incertidumbre relativa aproximada del 1 %

$$g = (9{,}8 \pm 0{,}1)\ \text{m/s}^2$$

e) Llamando t_f al instante en que la bolita golpea el suelo y X al correspondiente alcance, se cumple que

$$\left.\begin{aligned} X &= v_0 t_f \\ h &= \frac{1}{2} g t_f^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad X = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}941\ \text{m}$$

Para determinar la incertidumbre de este resultado, teniendo sólo en cuenta la incertidumbre de g, calculamos los valores máximo y mínimo de X, correspondientes respectivamente a los valores mínimo y máximo de g.

$$\left.\begin{aligned} g_{min} &= 9{,}7\ \text{m/s}^2 \rightarrow X_{max} = 0{,}9463\ \text{m} \\ g_{max} &= 9{,}9\ \text{m/s}^2 \rightarrow X_{min} = 0{,}9367\ \text{m} \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \Delta X = \frac{X_{max} - X_{min}}{2} = 0{,}005\ \text{m}$$

También puede llegarse a este resultado tomando incrementos, en valor absoluto, en la dependencia $X(g)$

$$X = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad\rightarrow\quad \Delta X = v_0\sqrt{2h}\,\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g^{3/2}} = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{\Delta g}{2g} = X\frac{\Delta g}{2g} \quad\rightarrow\quad \frac{\Delta X}{X} = \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$$

Es decir, la incertidumbre relativa de X es la mitad[4] de la de g. Como ésta es del 1 %, aquella es del 0,5 %

$$\Delta X = 0{,}005X \approx 0{,}005\ \text{m}$$

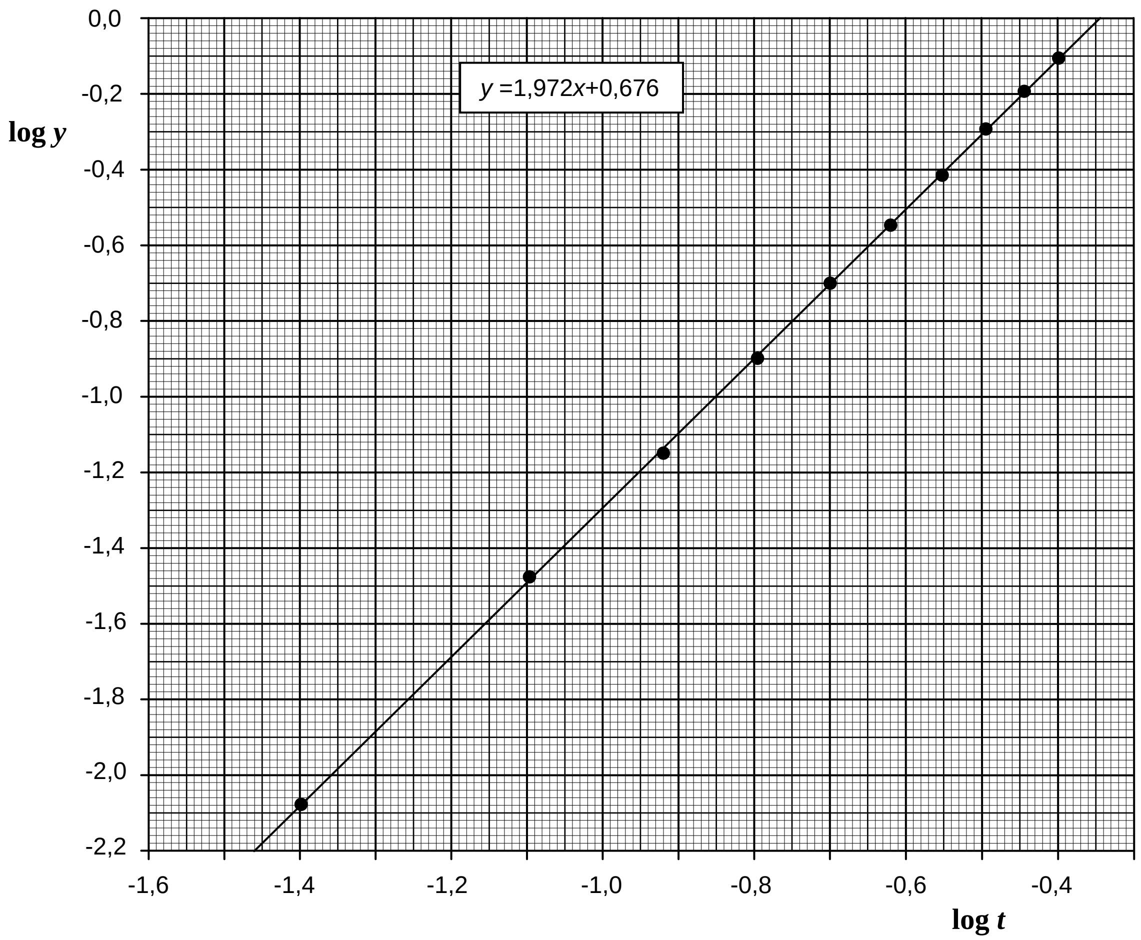
f) La dependencia $y(t)$ propuesta es potencial

$$y = k\,t^n$$

Esta dependencia puede "linealizarse" tomando logaritmos (en cualquier base) a ambos lados de la igualdad

$$\log y = \log k + n\log t$$

Por tanto, si la hipótesis es correcta, en una gráfica de $\log y$ frente a $\log t$ los puntos deben ajustarse bien a una línea recta, y la pendiente de dicha recta es precisamente n. En nuestro caso la gráfica es la siguiente:



Los puntos se ajustan muy bien a una línea recta de pendiente p = 1,97 (calculada por "mínimos cuadrados"), valor que es muy próximo al entero esperado n = 2.

[4] Siguiendo el método indicado de tomar incrementos en valor absoluto, es fácil demostrar que si la dependencia $y(x)$ es potencial, $y = kx^n$, los errores se propagan en la forma $\frac{\Delta y}{y} = |n|\frac{\Delta x}{x}$. En el apartado e) se acaba de comprobar esta idea con n = -1/2, y en el apartado d) se ha aplicado con n = -1.