XXV Olimpiada Española de Física

Fase de Aragón

25 ANIVERSARIO

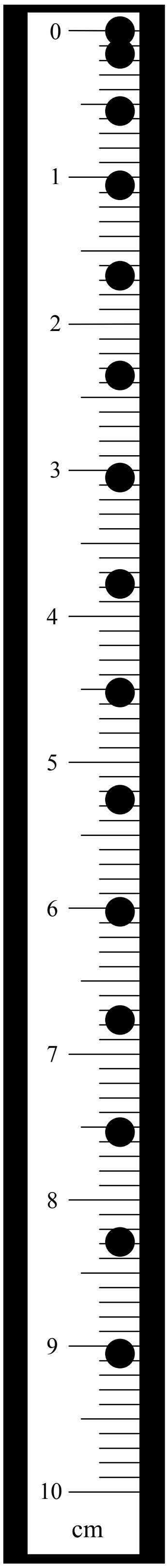
2ª PRUEBA

21 de febrero de 2014

Subvenciona:

PROBLEMA EXPERIMENTAL. **Caída de una bolita en un fluido[1].**

En la figura se muestra una fotografía, con exposiciones múltiples, de la caída de una pequeña esfera en el seno de un líquido viscoso. La esfera, de radio R = 1,00 mm, ha sido abandonada sin velocidad inicial en t = 0 (instante de la primera foto), y las sucesivas exposiciones han sido tomadas a intervalos regulares y exactos de 0,02 s. Las posiciones en cada instante pueden determinarse mediante la escala que también se muestra en la figura.



a) Mide en la escala la posición z del centro de la bolita en el instante t de cada exposición. Presenta los datos en una tabla.
Sugerencia: teniendo en cuenta el tamaño de la esfera, interpola visualmente en la escala para apreciar décimas de milímetro.

b) Calcula la velocidad media de la bolita entre cada dos exposiciones consecutivas. Tabula los resultados, asignando la velocidad calculada al tiempo medio entre las dos exposiciones. Habrás obtenido que la velocidad es prácticamente constante en la zona final del recorrido. ¿Cuál es esta *velocidad límite*, v_L ?

Este comportamiento experimental es congruente con un modelo de fuerza constante hacia abajo (peso de la bolita menos empuje de Arquímedes) y fuerza de fricción proporcional a la velocidad de la esfera en el seno del líquido, en sentido opuesto. Puede demostrarse que, con este modelo, la velocidad de la esfera tiende exponencialmente a v_L , es decir

$$v = v_L\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \qquad (1)$$

donde γ es una constante que depende de la masa de la esfera, m, de su radio, R, y del llamado *coeficiente de viscosidad* del fluido, η, en la forma

$$\gamma = \frac{6\pi R}{m}\eta \qquad (2)$$

Reordenando la ecuación (1) y tomando logaritmos se obtiene

$$\ln\left(1 - \frac{v}{v_L}\right) = -\gamma t \qquad (3)$$

Es decir, se espera una dependencia lineal entre la variable $y = \ln\left(1 - v/v_L\right)$ y el tiempo t.

c) Representa gráficamente en el papel milimetrado los seis primeros[2] puntos $y(t)$. Ajusta una línea recta a estos puntos y deduce el valor de γ en nuestro experimento.

d) Sabiendo que se ha empleado una esfera con m = 48 mg, obtén la viscosidad del líquido, η, en unidades del SI.

e) Supón que la principal fuente de error en este último resultado es el valor de la masa de la esfera, que se ha medido con una balanza digital que aprecia milésimas de gramo. Calcula la incertidumbre de η.

[1] Este problema experimental está inspirado en el que se planteó en la primera Olimpiada Aragonesa de Física, en 1990.

[2] En los últimos puntos la velocidad ya es prácticamente constante, de forma que cualquier pequeño error experimental puede conducir a resultados muy desviados, incluso absurdos, al calcular el valor de y.

Problema experimental. Solución

a) No es fácil determinar con precisión la posición del centro de la esfera en la regla de la figura, puesto que la esfera tapa un trozo de escala. Es más fácil y preciso observar la posición de su extremo superior (o inferior) y sumar (o restar) el radio R = 1,0 mm de la esfera. Con este procedimiento, y teniendo en cuenta que 1 mm en la escala ocupa realmente 2 mm en el papel, es razonable pensar que se puede determinar la posición z del centro de la esfera con una incertidumbre del orden de Δz = 0,1 mm. Las medidas se presentan en la tabla 1.

Tabla 1

***t* (s)**	0,00	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,22	0,24	0,26	0,28
***z* (cm)**	0,00	0,15	0,54	1,06	1,68	2,35	3,05	3,78	4,52	5,26	6,02	6,77	7,53	8,29	9,05

b) La velocidad media entre dos exposiciones se obtiene restando las posiciones correspondientes y dividiendo por el intervalo de tiempo. Los resultados se recogen en la tabla 2, junto con los valores de la variable y que necesitaremos en el siguiente apartado.

Tabla 2

***t* (s)**	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,19	0,21	0,23	0,25	0,27
***v* (cm/s)**	7,5	19,5	26,0	31,0	33,5	35,0	36,5	37,0	37,0	38,0	37,5	38,0	38,0	38,0
y	-0,22	-0,72	-1,16	-1,70	-2,15	-2,57								

Como se indica en el enunciado, la velocidad en prácticamente constante en la parte final de la caída de la bolita. Promediando los cinco últimos valores se obtiene una velocidad límite:

$$\boxed{v_L = 37{,}9 \text{ cm/s}}$$

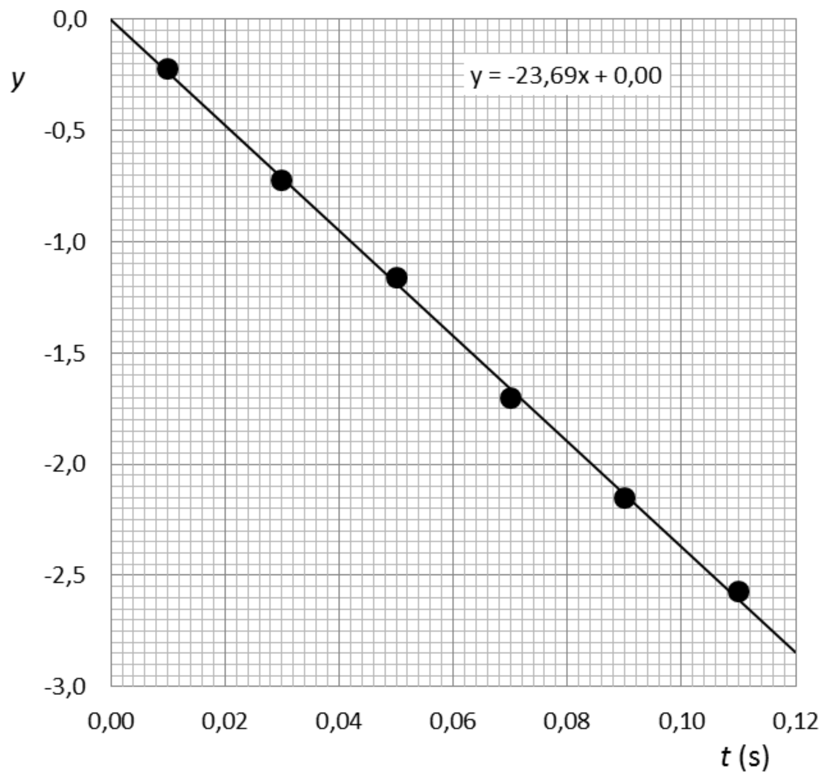
Aunque no se pide en el enunciado, la incertidumbre de esta velocidad se puede estimar como el error típico de la media, que resulta ser $\Delta v_L = 0{,}1$ cm/s.

c) Los valores de la variable y en los seis primeros puntos experimentales se encuentran en la tabla 2. A continuación se presenta la gráfica pedida de los puntos $y(t)$, junto con la línea recta que más se les aproxima.

La recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales pasa por el origen, como estaba previsto en la ecuación (3) del enunciado. La pendiente de esta recta puede obtenerse a partir de las coordenadas de un punto cualquiera, preferentemente de un punto alejado del origen, para mejorar la precisión relativa del resultado. Tomando, por ejemplo, el punto inferior derecho de la recta, $(t\ ,\ y)$ = (0,120 s , –2,84), la pendiente de la recta resulta

$$p = \frac{y}{t} = -23{,}67 \text{ s}^{-1}$$

Un ajuste estadístico empleando el método de *mínimos cuadrados* conduce al resultado que se muestra en la gráfica, con un valor muy similar para la pendiente.



Según (3), la pendiente de la recta $y(t)$ es $-\gamma$, de forma que el coeficiente de amortiguamiento buscado es

$$\boxed{\gamma = 23{,}67\ \mathrm{s}^{-1}}$$

d) Despejando en (2), el coeficiente de viscosidad es

$$\eta = \frac{m\gamma}{6\pi R} \qquad (4)$$

Con el valor obtenido para γ y los datos del enunciado resulta

$$\boxed{\eta = 0{,}06028\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}}$$

La viscosidad suele expresarse, en el SI, en la unidad equivalente Pa·s.

e) La balanza digital con la que se ha medido la masa de la bolita, $m = 48\ \mathrm{mg}$, tiene una resolución de 1 mg, por lo que la incertidumbre de la medida es Δm = 0,5 mg. Es decir, se espera que el valor exacto de la masa esté comprendido entre los valores extremos $m_{\min} = 47{,}5\ \mathrm{mg}$ y $m_{\max} = 48{,}5\ \mathrm{mg}$.

Sustituyendo estos valores extremos en (4) se obtienen los correspondientes valores máximo y mínimo de la viscosidad, y la incertidumbre buscada de η.

$$\left.\begin{array}{l} \eta_{\min} = 0{,}05965\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}} \\ \\ \eta_{\max} = 0{,}06090\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}} \end{array}\right\} \rightarrow \Delta\eta = \frac{1}{2}\left(\eta_{\max} - \eta_{\min}\right) = 6{,}3\times 10^{-4}\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$$

Con lo que el resultado del experimento, expresado con el número adecuado de cifras significativas, sería

$$\boxed{\eta = \left(6{,}03 \pm 0{,}06\right)\times 10^{-2}\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}}$$

Nota 1. Otra forma, matemáticamente más elegante, de obtener la incertidumbre de η consiste en tomar incrementos en (4)

$$\Delta\eta = \frac{\gamma}{6\pi R}\Delta m \qquad (5)$$

Operando, vuelve a obtenerse el mismo valor numérico de $\Delta\eta$ calculado previamente.

Teniendo en cuenta (4), la expresión (5) puede también escribirse en la forma

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta m}{m}$$

Esta igualdad indica que las incertidumbres relativas de m y de η son iguales. Esta idea es bien conocida en las técnicas básicas de *propagación de errores*: cuando la relación entre las variables es directa (o inversa) las incertidumbres relativas son iguales. En nuestro caso, la relación entre η y m es directa y la incertidumbre relativa de m es $\Delta m/m$=0,01 (es decir, el 1%), y por tanto $\Delta\eta = 0{,}01\eta = 6\times10^{-4}\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$.

Nota 2. Tal y como indica el enunciado, se ha considerado que la principal fuente de error en este experimento es la incertidumbre de la masa. Esta idea no es muy realista.

Ya se ha indicado en la solución del apartado b) que $v_L = (37{,}9 \pm 0{,}1)\ \mathrm{cm/s}$. Si se calculan las variables $y_1 = \ln(1 - v/v_{L,\min})$ e $y_2 = \ln(1 - v/v_{L,\max})$ y se representan en función del tiempo, se obtienen dos rectas con pendientes algo diferentes. Se deduce una incertidumbre para la pendiente $\Delta p = \Delta\gamma = 0{,}3\ \mathrm{s^{-1}}$. Por tanto, la incertidumbre relativa de γ es del 1,3%.

Por otra parte, el radio de la esfera se da en la forma R =1,00 mm, indicando que se ha medido con un aparato que aprecia la centésima de mm (por ejemplo, con un palmer), de forma que su incertidumbre es del orden de ΔR = 0,005 mm (puede depender de las circunstancias y de la repetitividad de la medida). Es decir, la incertidumbre relativa es del orden del 0,5%.

Uniendo las tres fuentes de error, que son independientes, la incertidumbre porcentual total de la viscosidad sería

$$\Delta\eta_{rel} = \sqrt{1^2 + 1{,}3^2 + 0{,}5^2} = 1{,}7\%$$

El resultado, con una estimación más realista de la incertidumbre, quedaría

$$\eta = (6{,}03 \pm 0{,}10)\times10^{-2}\ \mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$$