



1ª Prueba

27 de febrero de 2015

P1. La larga excursión a un cometa.

El 2 de marzo de 2004, desde la base de Kourou en la Guayana francesa, se lanzó al espacio la sonda espacial *Rosetta*. Así empezó la extraordinaria misión de la Agencia Espacial Europea, uno de cuyos objetivos era depositar el módulo Philae, que la sonda llevaba a bordo, sobre la superficie del cometa 67P, descubierto en 1969 por los astrónomos Klim Churyumov y Svetlana Gerasimenko.

En su largo viaje, el Rosetta aprovechó los impulsos gravitatorios propiciados por la Tierra (2005), por Marte (2007), por la Tierra de nuevo (2007), por el asteroide Steins (2008), otra vez por la Tierra (2009), y finalmente, por el asteroide Lutetia. En junio de 2011 el Rosetta entró en el espacio profundo, la parte más aburrida del viaje, y se echó una siestecita hasta que lo despertaron el 20 de enero de 2014, ya que en agosto tenía que comenzar las complicadas maniobras de aproximación al cometa 67P. De mayo a agosto de 2014, estando ya muy próximo al lejano y pequeño cometa, Rosetta tuvo que trabajar duro adquiriendo datos del cometa y haciendo reconocimientos detallados de su superficie para elegir el “campo de aterrizaje” de su módulo Philae. En la figura 1 se muestra una fotografía del cometa hecha desde la sonda, y se compara con un campo de fútbol¹.

Por fin, tras varios cambios de órbita alrededor del cometa, y siguiendo una trayectoria de colisión, a las 08:35 GMT del 12 de noviembre Rosetta dejó “caer” al Philae, como se esquematiza en la figura 2, desde una altura $H = 22,5$ km y con una velocidad inicial $v_i = 18,0$ cm/s respecto al cometa. Casi siete horas después Philae alcanzó la superficie de 67P. Tras el desprendimiento del módulo, Rosetta cambió su trayectoria y pasó a una órbita elíptica alrededor del Sol, acompañando al cometa. Se espera que en agosto de 2015 se alcance el perihelio de la órbita, y en diciembre se considerará terminada la misión.

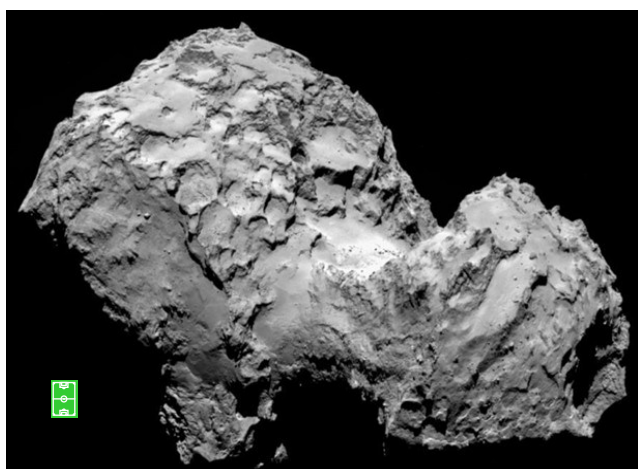


Fig. 1

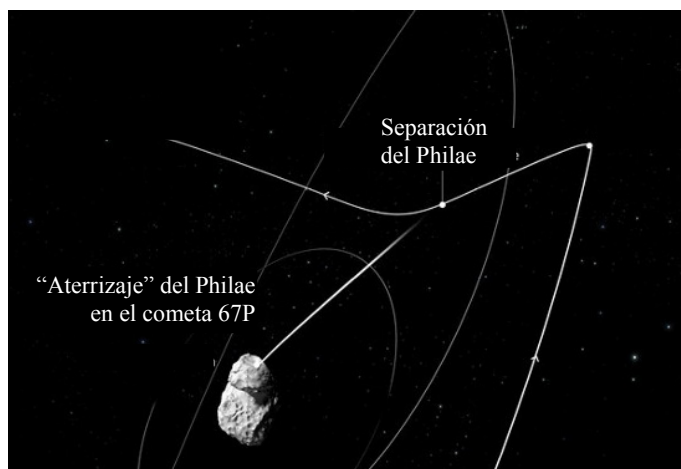


Fig. 2

A las enormes dificultades técnicas de este tipo de misiones hay que añadir una más, el considerable tiempo que transcurre desde que una señal de radio se emite en la Tierra hasta que es recibida por la sonda, o viceversa.

- a) Calcula el tiempo, Δt , que tardaba en llegar una señal desde la Tierra al Rosetta cuando estaba en las proximidades del cometa, a una distancia $D = 3,41$ ua. ($1 \text{ ua} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$).

¹ El “campo de fútbol” es una unidad cada vez más empleada en los *medios de comunicación*. Se usa indistintamente como unidad de longitud, de superficie e incluso ¡de volumen! A este paso, pronto sustituirá al viejo “metro” y sus derivados. Sin embargo, *nihil novum sub sole*, el Stadio (σταδίων) era una unidad de longitud de la antigua Grecia. Equivalía a la longitud del estadio de Olimpia.

Como se aprecia en la figura 1, el cometa 67P no se parece mucho a una esfera, pero en Física los “modelos” tienen una importancia capital para obtener resultados aproximados, y para elaborar estos modelos la imaginación juega un papel destacado. En nuestro caso, vamos a considerar que, en primera aproximación, el cometa es esférico, de masa $M_c = 1,0 \times 10^{13}$ kg y densidad $\rho_c = 470$ kg/m³ (datos obtenidos por el propio Rosseta).

- b) Con este modelo esférico, ¿cuál es el radio del cometa, R_c ?

Además de los anteriores, en adelante puedes emplear también los siguientes datos:

Masa de la Tierra: $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6,37 \times 10^6$ m

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g_T = 9,81$ m/s².

- c) Determina la expresión analítica de la velocidad del Philae al alcanzar la superficie del cometa, v_f , y calcula su valor.
- d) Determina y calcula la relación entre aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y la correspondiente en la superficie del cometa, g_T/g_c .
- e) Determina y calcula la velocidad de escape, v_e , de un cuerpo lanzado desde la superficie del cometa 67P.

El “aterrizaje” del Philae resultó ser más complicado de lo esperado. Fallaron los arpones que tenían que inmovilizarlo nada más tocar la superficie del planeta y el Philae rebotó dos veces hasta quedar en reposo en un lugar inapropiado y sombrío. De hecho, la escasa radiación solar que le llegaba hizo que sus baterías no pudiesen recargarse según lo previsto y se agotasen pronto. Aunque tuvo tiempo para transmitir información muy valiosa del cometa², se “durmió” de nuevo y quedó a la espera de volver a despertar cuando el 67P se aproxime al Sol. ¡Suerte, Philae!

² Esta misión ha sido declarada por la prestigiosa revista *Science* como el más importante descubrimiento científico del año 2014.

P1 Solución

- a) Las señales que se envían a la sonda son ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz, $c=3,0 \times 10^8$ km/s. Por tanto, el tiempo que tarda en llegar una señal desde la Tierra a un lugar separado una distancia $D=3,41 \text{ ua}=5,12 \times 10^{11}$ m, es

$$\Delta t = \frac{D}{c} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,71 \times 10^3 \text{ s} = 28,4 \text{ min}}$$

- b) El volumen del cometa, supuesto esférico, es

$$V = \frac{M_c}{\rho_c} = \frac{4}{3} \pi R_c^3 \Rightarrow$$

$$R_c = \left(\frac{3M_c}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3} \Rightarrow \boxed{R_c = 1,7 \text{ km}} \quad (1)$$

- c) El módulo Philae se desprende del Rosetta desde una altura H y con una velocidad inicial v_i , ambas conocidas, y cae hacia el cometa bajo la acción de su campo gravitatorio. Llamando m a la masa del módulo, la conservación de su energía mecánica implica

$$\frac{1}{2} m v_i^2 - G \frac{m M_c}{H + R_c} = \frac{1}{2} m v_f^2 - G \frac{m M_c}{R_c}$$

De donde

$$v_f^2 = v_i^2 + 2GM_c \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_c + H} \right)$$

Expresando G en función de g_T , la aceleración de la gravedad en la Tierra, $G = g_T R_T^2 / M_T$, resulta

$$v_f = \left[v_i^2 + 2g_T R_T^2 \frac{M_c}{M_T} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_c + H} \right) \right]^{1/2} \Rightarrow \boxed{v_f = 0,87 \text{ m/s}}$$

- d) Las expresiones de la aceleración de la gravedad en las superficies del cometa y de la Tierra son, respectivamente

$$g_c = G \frac{M_c}{R_c^2} \quad \text{y} \quad g_T = G \frac{M_T}{R_T^2}$$

La relación entre ellas es

$$\frac{g_T}{g_c} = \frac{M_T}{M_c} \frac{R_c^2}{R_T^2} \Rightarrow \boxed{\frac{g_T}{g_c} = 4,3 \times 10^4}$$

- e) La velocidad de escape es la que habría que imprimir a un cuerpo para que, lanzado desde la superficie del cometa, alcanzase una distancia infinita con velocidad cero, es decir con energía mecánica nula. Como esta energía debe conservarse, también debe ser nula en el instante inicial, o sea

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{m M_c}{R_c} = 0 \Rightarrow v_e^2 = 2G \frac{M_c}{R_c} \Rightarrow$$

$$v_e = \left(2g_T \frac{M_c}{M_T} \frac{R_T^2}{R_c} \right)^{1/2}, \quad \boxed{v_e = 0,88 \text{ m/s}}$$

P2 Intercambios de calor.

En invierno, cuando una persona entra en un edificio a través de una puerta, se intercambia aire entre el interior y el exterior. En este problema vamos a intentar estimar la pérdida de energía térmica en este proceso según sea la puerta normal (de bisagras) o giratoria, razonando con modelos muy sencillos. En ambos casos, cada vez que alguien hace uso de la puerta, un cierto volumen V de aire a una temperatura T_{int} sale al exterior y es sustituido por el mismo volumen de aire frío exterior, a temperatura $T_{\text{ext}} < T_{\text{int}}$.

- a) Si se desea que la temperatura T_{int} del recinto permanezca constante, determina la energía térmica Q que debe aportar el sistema calefactor cada vez que se hace uso de la puerta. Supón que el calor específico del aire es c y que su densidad es ρ .

Considera en adelante que el calor específico y la densidad del aire son $c=1,0 \times 10^3 \text{ J/(kg K)}$ y $\rho=1,3 \text{ kg/m}^3$, y que las temperaturas exterior e interior son $T_{\text{ext}}=273 \text{ K}$ y $T_{\text{int}}=295 \text{ K}$.

Puerta normal.

Supongamos que el tiempo que la puerta está abierta, cada vez que alguien la abre para entrar o salir, es $\tau=3,0 \text{ s}$ y que el aire frío entra a través de un área efectiva $S=1,8 \text{ m}^2$ con una velocidad $v=2,0 \text{ m/s}$.

- b) Determina el volumen de aire frío, V , que entra en el recinto durante el tiempo τ . Calcula su valor.
- c) Calcula la energía térmica, Q , que hay que aportar para mantener constante la temperatura T_{int} del recinto cada vez que se abre la puerta. Expresa el resultado en J y en kWh.

Puerta giratoria.

Consideremos ahora una puerta giratoria como la que se muestra en la fotografía de la figura 1, y se esquematiza en la figura 2. El radio de la puerta es $r=1,0 \text{ m}$ y su altura es $h=2,30 \text{ m}$. Considera que los tres sectores cilíndricos representados en blanco en la figura 2 están a la misma temperatura que el exterior.

- d) Supón que la puerta gira sólo el ángulo necesario para permitir el paso de una persona, tal como se indica con las flechas de la figura 2. Calcula el volumen V' de aire frío que entra al interior cuando la puerta realiza ese giro.
- e) Determina la energía térmica, Q' , que es necesario aportar para mantener la temperatura interior del recinto. Expresa el resultado en J y en kWh.



Fig. 1

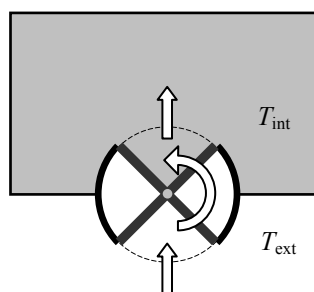


Fig. 2

P2 Solución

- a) Un cambio ΔT de la temperatura de un sistema de masa m y calor específico c requiere una transferencia de energía térmica dada por

$$Q = mc\Delta T$$

Si ρ es la densidad y V es el volumen del sistema, se tiene que

$$m = \rho V$$

Por lo tanto, en nuestro caso

$$Q = \rho V c (T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) \quad (1)$$

- b) Observando la figura 3 se deduce fácilmente que, si S es la sección por la que entra el aire frío con una velocidad v , el volumen de aire V que atraviesa dicha superficie durante un tiempo τ es

$$V = v S \tau$$

Con los datos del enunciado, y expresando el resultado con sólo dos cifras significativas, puesto que los datos tienen esta precisión de dos cifras,

$$V = 11 \text{ m}^3$$

- c) Sustituyendo en (1) el volumen anterior y los datos del enunciado, resulta

$$Q = 3,1 \times 10^5 \text{ J}$$

Como $1 \text{ kW h} = 1000 \text{ J/s} \times 3600 \text{ s} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$, o viceversa, $1 \text{ J} = 2,78 \times 10^{-7} \text{ kW h}$, entonces

$$Q = 8,6 \times 10^{-2} \text{ kW h}$$

- d) Observando la figura 2, el ángulo que debe girar la puerta para que una persona acceda al interior es de 180° . En consecuencia, el volumen V' de aire frío que se habrá introducido es el de medio cilindro de radio r y altura h

$$V' = \frac{1}{2} \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad V' = 3,6 \text{ m}^3$$

- e) Con este volumen V' y teniendo en cuenta de nuevo (1), se obtiene

$$Q' = 1,0 \times 10^5 \text{ J}, \quad Q' = 2,9 \times 10^{-2} \text{ kW h}$$

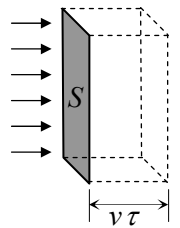


Fig. 3

Nótese que, con el modelo considerado, las pérdidas de calor debidas a la entrada de una persona son apreciablemente menores con una puerta giratoria que con una convencional.

P3. El láser¹.

En el Año Internacional de la Luz, no podía faltar en la OAF un problema sobre la luz... láser. Desde su invención en 1960, el láser ha revolucionado las comunicaciones, la industria, la medicina y otras muchas ramas de la vida cotidiana, la ciencia y la tecnología. En algunas aplicaciones se aprovecha la alta direccionalidad y concentración energética de la luz láser, que se presenta como un intenso haz casi cilíndrico con unos pocos milímetros de diámetro y pequeña divergencia. En otras aplicaciones interesa principalmente la alta monocromaticidad que puede tener la luz láser, de forma que es una onda casi armónica, como las que se manejan habitualmente al estudiar fenómenos ondulatorios. Las dos propiedades, direccionalidad y monocromaticidad, están íntimamente relacionadas con la llamada *cavidad resonante* del dispositivo, formada por dos espejos enfrentados, de forma que la luz viaja repetidamente en trayectos de ida y vuelta, reflejándose normalmente en ambos espejos. Por tanto, como ya habrás comprendido, las *ondas estacionarias* van a jugar un importante papel en el funcionamiento de un láser, y sobre ello vamos a tratar en este problema.



INTERNATIONAL
YEAR OF LIGHT
2015

La región entre los dos espejos está llena de un material, llamado *medio activo*, que amplifica la luz que viaja por él, de forma que, idealmente, la intensidad del haz dentro de la cavidad tendería a infinito debido a los repetidos pasos de la luz por dicho medio activo. Como en todo sistema físico real, siempre hay pérdidas energéticas que limitan el proceso, pero llega a alcanzarse un equilibrio entre ganancias y pérdidas con una muy alta densidad energética luminosa dentro de la cavidad. Precisamente una de las pérdidas del sistema es debida al pequeño porcentaje de transmitancia que tiene uno de los espejos, que deja salir al exterior “un poco” de la luz que incide sobre él. Este es el haz de luz láser que emerge del dispositivo.

El efecto amplificador del medio activo se debe al fenómeno conocido como *emisión estimulada*, consistente en que cuando un átomo emite radiación (un fotón) puede inducir la emisión de otros átomos excitados (que almacenan energía absorbida previamente por otra vía), con la particularidad de que ambas radiaciones se superponen en fase y se produce una interferencia constructiva entre ellas. Si quieres saber más sobre este tema, busca información sobre el proceso de *bombeo* para conseguir *inversión de población* entre dos niveles de los átomos del medio activo.

Pero volvamos al tema central de nuestro problema: la luz (onda electromagnética transversal) viaja repetidamente entre los espejos de la cavidad resonante y la interferencia entre las ondas que viajan en ambos sentidos es constructiva sólo para unos valores concretos de la longitud de onda (o frecuencia) de la radiación, correspondientes a los llamados *modos normales de la cavidad* (ondas estacionarias). La distribución de amplitud del campo eléctrico dentro de la cavidad es del mismo tipo que conoces para ondas estacionarias transversales en una cuerda tensa con sus dos extremos fijos, es decir con nodos en los extremos, como se esquematiza en la figura 1.

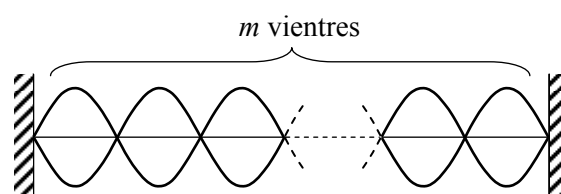


Fig. 1. Modo m de la cavidad

- Teniendo en cuenta que la frecuencia de la luz es la misma en cualquier medio y que la cavidad láser está rellena de un medio de índice de refracción n , deduce la relación entre la longitud de onda de la luz dentro de la cavidad, λ , y la longitud de onda de esa misma luz en el vacío, λ_0 .
- Obtén una expresión para las frecuencias de los modos en una cavidad de longitud L . Demuestra que la separación en frecuencia entre dos modos consecutivos es $\Delta f = c/2nL$, donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

¹ La palabra láser está formada por las siglas en inglés del proceso responsable de su funcionamiento: “Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation” (amplificación de luz mediante emisión estimulada de radiación).

Vamos a considerar en adelante un láser de rubí (como el primer láser que funcionó en 1960) con índice de refracción $n = 1,760$ y una cavidad de longitud $L = 200,0$ mm. La velocidad de la luz en el vacío es $c = 2,998 \times 10^8$ m/s.

- c) Calcula la frecuencia del modo fundamental de esta cavidad, f_1 , y la separación entre dos modos consecutivos, Δf .
- d) Si el láser de rubí emite luz con espectro centrado en una longitud de onda en el vacío $\lambda_0 = 694,3$ nm, ¿cuál es el número de orden, m , del modo implicado?

El medio activo sólo puede amplificar luz dentro de un estrecho rango de frecuencias, definido por su *curva de ganancia* $\gamma(\nu)$ (figura 2), en la que γ es la ganancia y ν la frecuencia de la luz. Las frecuencias para las que no se supera un cierto valor umbral de ganancia no son amplificadas, pues las pérdidas superan a las ganancias, y en la práctica no aparecen en la radiación del láser. La curva de ganancia típica del medio activo es una función *lorentziana*, de la forma

$$\gamma(\nu) = A \frac{\Delta \nu}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Delta \nu / 2)^2} \quad (1)$$

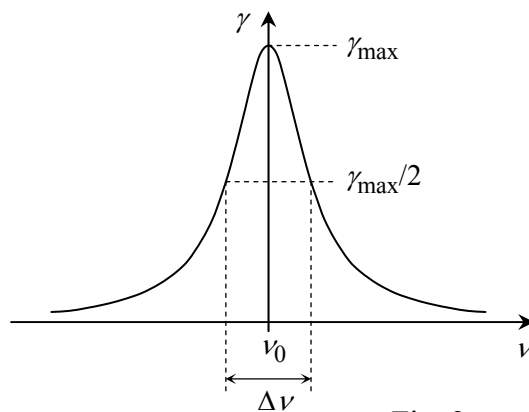


Fig. 2.

donde, como es fácil comprobar, ν_0 es la frecuencia para la que se alcanza la máxima ganancia, $\gamma_{\max}$, y $\Delta \nu$ es la anchura de la curva a mitad de su altura (véase la figura 2). Para nuestro láser de rubí, el máximo de la curva corresponde a la longitud de onda ya mencionada, $\lambda_0 = 694,3$ nm, y la anchura es $\Delta \nu = 8,0 \times 10^8$ Hz. A es una constante cuyo valor no vas a necesitar.

- e) Si sólo se amplifican eficientemente las frecuencias con ganancia γ superior al 10 % de $\gamma_{\max}$, ¿cuántos modos aparecerán en la luz emitida por el láser²? Por simplicidad, supón que uno de los modos implicados está perfectamente centrado en la curva de ganancia.
- f) Suponiendo que la curva de ganancia no depende de la longitud de la cavidad, calcula la longitud máxima que puede tener para que sólo aparezca un modo en la luz del láser³.

² Si más de un modo se amplifica eficientemente, la luz emitida por el láser contiene radiación en un “peine” de frecuencias dentro de la curva de ganancia, y se dice que el láser es *multimodo*. Estos láseres se usan en aplicaciones donde interesa la alta potencia y no es necesaria la monocromaticidad.

³ Los láseres *monomodo* emiten luz muy monocromática. Esto es necesario, por ejemplo, para el registro de hologramas o las comunicaciones por fibra óptica.

P3 Solución

- a) Como es bien sabido, la longitud de onda, λ , la frecuencia, f , y la velocidad de propagación, v , de cualquier onda armónica cumplen

$$v = \lambda f \quad (2)$$

En particular, la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío es $c = \lambda_0 f$, y en un medio material de índice de refracción n la velocidad es

$$v = \frac{c}{n} = \frac{\lambda_0 f}{n} \quad (3)$$

Comparando (2) y (3) se obtiene

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad (4)$$

- b) La conocida condición de onda estacionaria en un espacio de longitud L , con nodos en los dos extremos, es

$$L = m \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

donde m es un número entero. Combinando esta ecuación con (4) y (3) y despejando la frecuencia se obtienen las posibles frecuencias, f_m , de los modos de la cavidad láser

$$f_m = m \frac{c}{2nL} \quad (6)$$

Por tanto, la separación en frecuencia entre dos modos consecutivos, de órdenes m y $m+1$, es

$$\Delta f = \frac{c}{2nL} \quad (7)$$

- c) Observando (6) y (7), se deduce que la frecuencia f_1 del modo fundamental, correspondiente a $m = 1$, coincide con Δf . Operando con los datos se obtiene

$$f_1 = \Delta f = 4,259 \times 10^8 \text{ Hz} \quad (8)$$

- d) Podría calcularse la frecuencia de la luz para la longitud de onda $\lambda_0 = 694,3 \text{ nm}$, llevarla a (6) y despejar m , pero es más rápido y directo tener en cuenta (4) y (5), de donde se deduce que

$$m = 2n \frac{L}{\lambda_0}$$

El resultado que aparece en la pantalla de la calculadora es 1 013 970,90595. Pero se supone que m debe ser entero, por lo que es tentador redondear al entero más próximo y responder que el orden del modo implicado es $m = 1\,013\,971$. Sin embargo, este resultado numérico no tiene mucho sentido físico porque todos los datos están dados con cuatro cifras significativas. El resultado debe darse también con cuatro cifras significativas, (o como mucho con cinco, puesto que la primera cifra es un uno), es decir, la contestación más correcta es

$$\text{El número de orden del modo implicado es un entero próximo a } 1,014 \times 10^6$$

No es de extrañar que se obtenga un número tan grande, porque la longitud de la cavidad es muchísimo mayor que la longitud de onda de la luz.

- e) Se trata de averiguar cuántos modos de la cavidad, correspondientes a una serie de valores de m consecutivos, caben dentro de la curva de ganancia en su zona central, donde γ es superior a $\gamma_{\max}/10$.

La ganancia en el máximo es

$$\gamma_{\max} = \gamma(\nu = \nu_0) = A \frac{\Delta \nu}{(\Delta \nu/2)^2} = \frac{4A}{\Delta \nu}$$

Como es fácil comprobar, la curva es simétrica en torno a $\nu = \nu_0$, es decir $\gamma(\nu_0 - \Delta) = \gamma(\nu_0 + \Delta)$. La semianchura Δ de la zona de amplificación eficaz debe cumplir (Figura 3)

$$\gamma(\nu_0 \pm \Delta) = \frac{\gamma_{\max}}{10} = \frac{2A}{5\Delta \nu} \quad (9)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta (1),

$$\gamma(\nu_0 \pm \Delta) = A \frac{\Delta \nu}{\Delta^2 + (\Delta \nu/2)^2} \quad (10)$$

Igualando (9) y (10) y despejando Δ se obtiene

$$\Delta = \frac{3}{2} \Delta \nu$$

Con nuestros datos, la anchura del rango de frecuencias a cada lado de ν_0 con amplificación eficaz es

$$\Delta = 1,2 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Teniendo en cuenta la simetría de la curva de ganancia y que uno de los modos está centrado en ella, en cada lado de la curva caben $\Delta/\Delta f$ modos. El número de modos debe ser entero, por lo que hay que redondear el resultado al entero inferior. En nuestro caso

$$\frac{\Delta}{\Delta f} = 2,8$$

Es decir, en cada ala de la curva caben dos modos. Añadiendo el central, obtenemos un total de cinco modos. La situación se esquematiza en la figura 4, que está aproximadamente a escala en el eje de frecuencias.

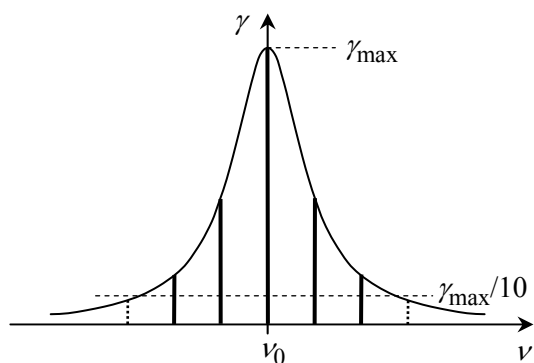


Fig. 4

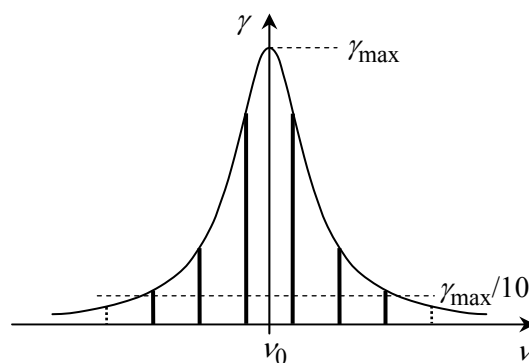


Fig. 5

Si no se considera la condición de que un modo esté centrado, podrían ser seis los modos emitidos, como en el caso de la figura 5.

- f) Para reducir el número de modos emitidos debe aumentarse la separación Δf entre ellos. Teniendo en cuenta (7), para ello debe reducirse la longitud L de la cavidad.

Para que el láser sea monomodo, supuesto que ese modo está centrado en la curva de ganancia, debe cumplirse $\Delta f > \Delta$

$$\frac{c}{2nL} > \frac{3}{2}\Delta\nu$$

Es decir

$$L_{\max} = \frac{c}{3n\Delta\nu} = 7,1 \text{ cm}$$

Si se considerase que el modo puede estar descentrado, la condición de láser monomodo sería $\Delta f > 2\Delta$ y la longitud máxima de la cavidad sería la mitad de la anterior, es decir 3,6 cm.